



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
тел. : [095] 930-56-48  
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 1 - 2000 г. / Варианты

## **Материалы вступительных экзаменов 1999 года**

**(МГУ им. М.В. Ломоносова)**

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала  
в коммерческих целях  
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск  
**VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!**

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>  
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>  
<http://vivovoco.rsl.ru>

# Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский государственный  
университет  
им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$(x^2 + 4) \lg \sin^2 3x + x^2 \lg \cos^2 2x = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

2. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положительный, равна  $\frac{40}{27}$ , а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком «плюс», второй – со знаком «минус» и т.д.) равна  $\frac{20}{27}$ . Найдите знаменатель прогрессии.

3. Найдите все  $x$ , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3|(|x - 5| - |x - 3|) - 6x$$

и

$$|x|(|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведена прямая, пересекающая окружности в точках  $C$  и  $D$ , лежащих по разные стороны от прямой  $AB$ . Касательные к этим окружностям в точках  $C$  и  $D$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите  $AE$ , если  $AB = 10$ ,  $AC = 16$ ,  $AD = 15$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

6. Основанием пирамиды  $SABCD$  является трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  такими, что  $BC : AD = 2 : 5$ . Диагонали трапеции пересека-

ются в точке  $E$ , а центр  $O$  вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке  $SE$  и делит его в отношении  $SO : OE = 7 : 2$ . Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани  $SBC$  равна 8.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

2. Решите уравнение

$$|\log_2(2x + 7)| = \log_2(1 + |x + 3|) + \log_2(1 - |x + 3|).$$

3. При каких значениях  $\varphi$  все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin \frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

4. В трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AB = 9$  и  $CD = 5$  биссектриса угла  $D$  пересекает биссектрисы углов  $A$  и  $C$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а биссектриса угла  $B$  пересекает те же две биссектрисы в точках  $L$  и  $K$ , причем точка  $K$  лежит на основании  $AD$ .

а) В каком отношении прямая  $LN$  делит сторону  $AB$ , а прямая  $MK$  – сторону  $BC$ ?

б) Найдите отношение  $MN : KL$ , если  $LM : KN = 3 : 7$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$

не меньше 1.

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-99», апрель)

1. Пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта  $A$  со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт  $D$ . Достигнув пункта  $D$ , он поворачивает обратно и доходит до пункта  $B$ , затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между  $A$  и  $C$  он прошел за 3 ч, а расстояния между  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $C$  и  $D$  (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между  $B$  и  $C$ .

2. Решите неравенство

$$\left(x + \frac{8}{x}\right) \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right| \geq 9 \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right|.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cos x.$$

4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  такая, что  $\angle CAD = 2 \angle DAB$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ADC$  и  $ADB$ , равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой  $BC$  равно  $\sqrt{129}$ . Найдите  $AD$ .

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left| \frac{a-2}{x+a} \right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке  $[-4; 0]$ ?

6. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  – основания,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ) отрезки  $M_1 N_1$ ,  $M_2 N_2$ ,  $M_3 N_3$  – общие перпендикуляры к парам отрезков  $A_1 C_1$  и  $AB_1$ ,  $BC_1$  и  $AC$ ,  $DC_1$  и  $AD_1$  соответственно. Объем параллелепипеда равен  $V$ , радиус описанной сферы равен  $R$ , а сумма длин ребер  $AA_1$ ,  $AB$  и  $AD$  равна  $m$ . Найдите сумму объемов пирамид  $AA_1 M_1 N_1$ ,  $AB M_2 N_2$  и  $AD M_3 N_3$ .

## Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ . Сравните  $\arccos(-\sqrt{3 \cos \alpha - 1})$  и  $\frac{19\pi}{24}$ .

2. На координатной плоскости  $(x, y)$  проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением  $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$ , пересекает ее в точках  $A$  и  $B$ . Найдите сумму длин отрезка  $AB$  и меньшей дуги  $AB$ .

3. Решите неравенство

$$\left| \log_{x+1} \sqrt{(x-2)^4} + 2 \right| \geq -3 + \log_{\frac{1}{\pi+1}} \sqrt{(x-2)^6}.$$

4. В четырехугольной пирамиде  $SABCD$  высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды  $S$ , равны  $\sqrt{2}$ . Известно, что  $AB = 2$ ,  $BC = 6$ ,  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$ . Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника  $ABCD$ .

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 14x + 3 \operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$

6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $\angle ACB = 75^\circ$ , а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника  $ABC$  равен  $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

## Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)

1. Решите уравнение

$$\sin x - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x+1} = x+4.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)}.$$

4. В треугольнике  $ABC$  взяты точка  $N$  на стороне  $AB$ , а точка  $M$  — на стороне  $AC$ . Отрезки  $CN$  и  $BM$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AN : NB = 2 : 3$ ,  $BO : OM = 5 : 2$ . Найдите  $CO : ON$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y+3x}{x+y}\right)} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}. \end{cases}$$

6. В ромбе  $ABCD$  высоты  $BP$  и  $BQ$  пересекают диагональ  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  ( $M$  между  $A$  и  $N$ ),  $AM = p$ ,  $MN = q$ . Найдите  $PQ$ .

7. При каких значениях  $a$  уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке  $0 \leq x < 2\pi$ ?

8. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ )  $AB = BC = 2a$ ,  $AA_1 = a$ . Плоскость сечения проходит через точки  $B_1$  и  $D$  параллельно прямой  $AC$ . Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной  $B$ .

## Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos 3x + 2 \sin^2 x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\left| 2 - \frac{1}{x-4} \right| < 3.$$

3. В равнобокую трапецию  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) вписана окружность,  $BC : AD = 1 : 3$ , площадь трапеции равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Найдите  $AB$ .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$$

6. Через точку  $N$  проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром  $O$ . На одной из этих прямых взята точка  $A$ , а на другой прямой взята точка  $B$  так, что  $OA = OB$ ,  $OA > ON$ ,  $NA \neq NB$ . Известно, что  $NA = a$ ,  $NB = b$ ,  $OA = c$ . Найдите  $ON$ .

7. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$  боковое ребро  $SA$  равно  $b$ . Сфера радиуса  $\frac{b}{2}$  касается плоскости  $SAC$  в точке  $C$  и проходит через точку  $B$ . Найдите  $\angle ASC$ .

8. Для любого допустимого значения  $a$  решите неравенство

$$\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$$

и найдите, при каком значении  $a$  множество точек  $x$ , не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

## Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \leq 2.$$

2. Решите уравнение

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

3. Решите неравенство

$$(\log_{3-x}(2x+1))(\log_{2x+1} x^2) \leq (\log_{3-x}(3x+1))(\log_{3x+1}(x+2)).$$

4. В треугольнике  $ABC$  угол  $\angle B$  равен  $\pi/6$ . Через точки  $A$  и  $B$  проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $C$ . Найдите длину стороны  $AC$ .

5. В сферу радиуса  $\sqrt{3}$  вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

7. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  определяется следующим правилом:  $a_1 = 0$ ,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т.е.  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 6$ ,  $a_5 = 12$ ,  $a_6 = 14$  и т.д. Найдите  $a_{1999}$ .

## Вариант 8

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$8 \cos 6x - 12 \sin 3x = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x-1|} \geq 2x + 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{8-7x} \left( x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8} \right) + 2 \log_{(8-7x)^2} (x+3) = 1.$$

4. На основаниях  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  построены квадраты  $ADEF$  и  $BCGH$ , расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Найдите длину отрезка  $AD$ , если  $BC = 2$ ,  $GO = 7$ , а  $GF = 18$ .

5. Найдите все значения  $y$ , удовлетворяющие условию  $y > \frac{1}{2}$ , такие, что

неравенство

$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$

выполняется при всех  $x$  из интервала  $1 < x < 2y$ .

6. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы — первый из точки  $A$ , второй из точки  $B$  — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке  $B$ . Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$4^x - 2^x = 56.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 2x = \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{\pi} |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{\pi}} |x|.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt[5]{y^5} \geq \sqrt[4]{y^4}.$$

5. Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

6. Дан треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ , равным  $\sqrt{3}/2$ , и высотой  $CH$ , опущенной на это основание и равной  $\sqrt{6}/3$ . Известно, что точка  $H$  лежит на  $AB$  и  $AH : HB = 2 : 1$ . В угол  $ABC$  треугольника  $ABC$  вписана окружность, центр которой лежит на высоте  $CH$ . Найдите радиус этой окружности.

7. Для каждого значения параметра  $b \leq 0$  решите неравенство (относительно  $x$ )

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq b.$$

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y = \left( \log_{\frac{1}{2}} (x + 3) \right) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x + 2)^2} - 1}.$$

2. Известно, что  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0.$$

Найдите значение  $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$  и выясните, какое из чисел больше:  $A$  или 1,999?

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости  $(x, y)$  системой неравенств

$$\begin{cases} x(x + y - \sqrt{2}) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2. \end{cases}$$

4. Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  равна половине стороны  $BC$ . Угол между  $AM$  и высотой  $AH$  равен  $40^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

5. Решите уравнение

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = \\ = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|. \end{aligned}$$

6. Дана арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots$ , в которой  $a_3 = -13$  и  $a_7 = 3$ . Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

7. Сфера радиуса  $\sqrt{41}$  проходит через вершины  $B, C, C_1$  и через середину ребра  $A_1D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ). Найдите площадь поверхности этого куба.

8. Решите неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \leq \log_{x+19} \cos x.$$

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{4x-8} (x^2 - 2x - 3) = 1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2.$$

3. По реке из пункта  $A$  в пункт  $B$  выплыл катер. Одновременно из пункта  $B$  в пункт  $A$  выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от  $B$  к  $A$ , лодка встретила с катером. Катер, достигнув пункта  $B$ , повернул обратно и прибыл в пункт  $A$  одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна  $\frac{3}{2}\pi$ .

5. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $L$  и  $M$  являются, соответственно, серединами сторон  $BC$  и  $AD$ . Отрезок  $LM$  содержит точку  $K$ . Четырехугольник  $ABCD$  таков, что в него

можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 3$ ,  $AC = \sqrt{13}$  и  $LK : KM = \frac{1}{3}$ .

6. В пространстве заданы три луча  $DA, DB$  и  $DC$ , имеющие общее начало  $D$ , так что

$$\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ.$$

Сфера пересекает луч  $DA$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ , луч  $DB$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ , а луч  $DC$  — в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Найдите площадь треугольника  $A_2B_2C_2$ , если площади треугольников  $DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1$  и  $DA_2B_2$  соответственно равны  $\frac{15}{2}, 10, 6$  и  $40$ .

Вариант 12

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{y-1} = 6-y.$$

2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

3. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  проведены диагонали  $AC$  и  $BD$ . При этом оказалось, что  $\angle BAC = \angle BDC$ , а площадь круга, описанного около треугольника  $BDC$ , равна  $\frac{25\pi}{4}$ .

1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

2) Зная, что

$$BC = 3, AC = 4, \angle BAD = 90^\circ,$$

найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

4. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

5. Решите неравенство

$$\frac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leq 0.$$

6. При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(x+3a)} \geq \left| \log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(x+3a)} \right|$$

не имеет решений на отрезке  $[-5; 6]$ ?

#### Вариант 13

(отделение экономики  
экономического факультета)

1. Решите неравенство

$$\log_{|x|-2} |x-3| \leq 0.$$

2. Решите неравенство

$$4 \sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

3. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

4. В трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) диагонали  $AC = a$ ,  $BD = \frac{7}{5}a$ . Найдите площадь трапеции, если  $\angle CAB = 2\angle DBA$ .

5. Решите уравнение

$$x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

6. В треугольной пирамиде  $SABC$  угол  $\angle ACB = \alpha$ , ребро  $SC = d$  является диаметром сферы, пересекающей ребра  $SA$  и  $SB$  в их серединах. Найдите объем пирамиды, если  $\angle SAC = \angle SBC = \beta$ , причем  $\beta < \frac{\pi}{4}$ .

7. Найдите все значения  $b$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} b \sin |2z| + \log_5 \left( x^8 \sqrt{2-5x^8} \right) + b^2 = 0, \\ \left( (y^2-1) \cos^2 z - y \cdot \sin 2z + 1 \right) \times \\ \times \left( 1 + \sqrt{\pi+2z} + \sqrt{\pi-2z} \right) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

#### Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

2. Решите уравнение

$$x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых множество значений функции  $f(x) = \frac{3x+p}{x^2+5x+7}$  содержит полуинтервал  $(-1; 3]$ . Определите при каждом таком  $p$  множество значений функции  $f(x)$ .

5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Длины противоположных сторон  $AB$  и  $CD$  равны, соответственно, 9 и 4,  $AC = 7$ ,  $BD = 8$ . Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

6. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел  $(x, y, z)$  удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ a \cdot yz + a \cdot xz + a \cdot xy > xyz. \end{cases}$$

#### Вариант 15

(отделение структурной и  
прикладной лингвистики  
филологического факультета)

1. Расстояние в 160 км между пунктами  $A$  и  $B$  автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, — со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между  $A$  и  $B$  занимает ровная дорога?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

3. В треугольнике  $ABC$  медиана  $AK$  пересекает медиану  $BD$  в точке  $L$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь четырехугольника  $KCDL$  равна 5.

4. Решите уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)} (\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$

5. Найдите все решения системы

уравнений

$$\begin{cases} \cos^3(z+4y+\pi/4) + \\ + 1/\sin(2z+2y-\pi/4) = 0, \\ \cos(3z+\pi/4) + \\ + 1/\sin^3(4z-2y-\pi/4) = 0. \end{cases}$$

#### Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2 + 4^{\left(3\log_4 \sqrt[3]{2}\right)} \left( \frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10} \right) = 0.$$

2. Упростив выражение

$$A = 1 - y + \frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy}} + (3-y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^{-2}}} y^{\frac{5}{6}} x^{\frac{1}{6}},$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$  — действительные числа, выясните, что больше:  $A$  или  $\frac{5}{7}$ .

3. Решите уравнение

$$\sin 9x = 6 \sin 5x \cos 2x - \sin x.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\frac{\pi}{8}$ . Каждое боковое ребро равно  $\sqrt{6}$  и наклонено к плоскости основания под углом  $\frac{5\pi}{13}$ . Определите объем пирамиды.

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7} \geq 1.$$

6. Окружности радиусов 2 и 6 с центрами, соответственно, в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $C$ . К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке  $D$ . Найдите радиус вписанной в треугольник  $O_1O_2D$  окружности.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2(y\sqrt{2}+6)^3 - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2(y\sqrt{2}+6) + x + 1. \end{cases}$$

#### ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На край доски, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, кладут небольшую шайбу, масса которой в  $k$

раз меньше массы доски. Шайбе щелчком сообщают скорость, направленную к центру доски. Если эта скорость больше  $u$ , то шайба соскальзывает с доски. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость шайбы будет в  $n$  раз больше  $u$  ( $n > 1$ )?

2. Неоднородная балка (рис. 1) подвешена к потолку на трех одинаковых

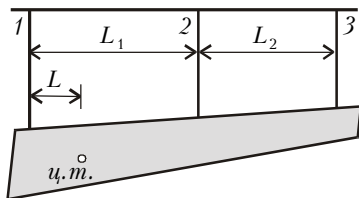


Рис. 1

в недеформированном состоянии легких резиновых шнурах так, что шнуры вертикальны и лежат в одной плоскости. Расстояния между шнурами  $L_1$  и  $L_2$ , а между первым шнуром и центром тяжести балки (по горизонтали)  $L$ . Точки крепления шнуров к балке лежат на одной прямой. Найдите отношение сил натяжения первого и второго шнуров, считая деформации шнуров малыми.

3. На внутренней поверхности тонкого обода колеса массой  $M$  и радиусом  $R$  лежит груз малых размеров массой  $m$ . Коэффициент трения груза об обод  $\mu \ll 1$ . Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Пренебрегая массой спиц и втулки колеса, найдите максимальную скорость груза, при которой колебания колеса еще могут быть гармоническими.

4. В горизонтально расположенный цилиндр с поршнем, касающимся дна, через кран в дне накачали гелий. В результате поршень несколько передвинулся. Закрыв кран, цилиндр медленно нагрели, а затем начали охлаждать. Когда от гелия отвели в  $n = 4$  раза меньшее количество теплоты, чем было им получено при нагревании, поршень начал двигаться. Найдите отношение сил трения и атмосферного давления, действующих на поршень, если отношение максимального объема гелия к его объему перед нагреванием  $k = 5$ .

5. Между поршнем и дном гладкого расположенного горизонтально цилиндра находится кусочек льда массой  $m$  и насыщенный водяной пар. В некоторый момент температура льда стала равной  $0^\circ\text{C}$ , а объем пара стал равным  $V$ . Пренебрегая объемом образующейся воды и теплообменом пара и льда с другими телами, найдите перемещение поршня по прошествии достаточно большого промежутка времени. Пло-

щадь поперечного сечения цилиндра  $S$ , молярные теплоты плавления льда и парообразования воды  $\lambda$  и  $L$ , молярные теплоемкость и масса воды  $C$  и  $M$ . Опыт проводился при нормальном атмосферном давлении.

6. В плоский воздушный конденсатор параллельно его обкладкам вставили тонкую проводящую пластину, размеры которой совпадают с размерами обкладок. Обкладки соединены проводником. Пластина имеет заряд  $q$ . Какую минимальную работу нужно совершить против сил электрического поля, чтобы расстояние между одной из обкладок и пластиной изменить от начального  $a$  до конечного  $b$ , если площадь пластины  $S$ , а расстояние между обкладками конденсатора равно  $d$  и много меньше линейных размеров пластин?

7. К гальваническому элементу последовательно подключены два резистора. Сопротивление первого резистора в  $n$  раз меньше внутреннего сопротивления элемента, а сопротивление второго выбрано таким, что на нем выделяется максимально возможное количество теплоты. Во сколько раз изменится скорость растворения отрицательного электрода элемента, если эти резисторы подключить к нему, соединив их параллельно?

8. Тонкий стержень длиной  $L$  и массой  $m$  подвесили за концы на двух одинаковых легких нерастяжимых нитях в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  так, что его ось горизонтальна, а нити вертикальны. Затем через стержень пропустили заряд  $q$  столь быстро, что стержень практически не сместился из положения равновесия. Зная, что максимальная высота поднятия стержня много меньше длины нитей  $H$ , найдите максимальную вертикальную составляющую его скорости после прохождения заряда.

9. Чтобы лучше рассмотреть мелкие детали рисунка, человек берет лупу. Поднося ее к рисунку, он видит на нем резкое изображение нити лампочки, висящей над столом под потолком комнаты, когда расстояние между лупой и рисунком равно  $b = 5$  см. Поднося лупу к глазу, человек рассматривает рисунок. Найдите увеличение изображения рисунка, если оно находится на расстоянии наилучшего зрения  $D = 25$  см.

10. Угловое расстояние между максимумами первого и второго порядков синего света с длиной волны  $\lambda_c = 0,44$  мкм, наблюдаемыми при освещении дифракционной решетки параллельным пучком света от ртутной

лампы, падающим под углом  $\alpha = 50^\circ$ , оказалось равным  $\Delta\phi = 5^\circ$ . При этом в спектре третьего порядка наблюдались две близкие желтые линии, угловое расстояние между максимумами которых было равно  $\delta\phi = 4,3'$ . Найдите разность длин волн  $\delta\lambda_{\text{ж}}$  желтого дублета ртути.

#### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. В кабине лифта высотой  $H = 2,5$  м, движущейся с ускорением, равным  $a = 0,8$  м/с<sup>2</sup> и направленным вниз, с высоты  $h = 0,5$  м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью  $v_0$  относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

2. К грузику массой  $M = 300$  г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок (рис. 2). На втором конце нити подвешен грузик массой  $m = 200$  г. Когда блок заторможен, длина пружины  $l = 15$  см. Какую длину  $l_1$  будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины  $l_0 = 10$  см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

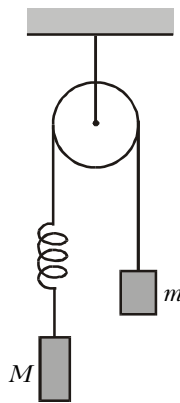


Рис. 2

3. Металлический стержень, изогнутый под углом  $\phi = 45^\circ$ , как показано на рисунке 3, вращается с угловой скоростью  $\omega = 6$  с<sup>-1</sup> вокруг вертикальной оси  $OO'$ . К концу стержня прикреплен груз массой  $m = 0,1$  кг на расстоянии  $l = 0,1$  м от точки  $O$ . Определите модуль  $F$  силы, с которой стержень действует на груз.

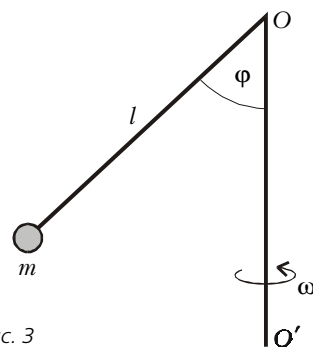


Рис. 3

Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

4. Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, чтобы с высоты  $h = 2 \text{ м}$  перебросить через стенку высотой  $H = 4 \text{ м}$  камень массой  $m = 0,2 \text{ кг}$ ? Стенка расположена на расстоянии  $L = 4 \text{ м}$  от места бросания. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. С идеальным одноатомным газом проводят процесс 1–2, показанный на рисунке 4. Во сколько раз ( $\alpha$ ) при этом изменяется средняя кинетическая энергия одной молекулы?

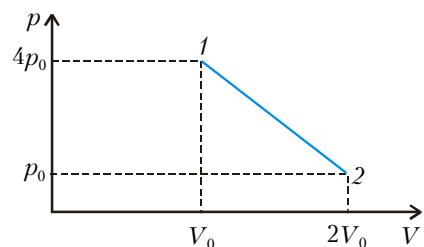


Рис. 4

6. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.5). Найдите работу  $A$ , совершаемую газом за цикл, если известно, что

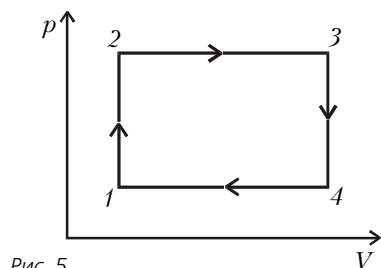


Рис. 5

температура в состоянии 1 равна  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а в состояниях 2 и 4 температура одна и та же и равна  $T = 320 \text{ К}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

7. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 0,1 \text{ Ом}$  присоединена к цепи, изображенной на рисунке 6. Сопротивление каждого из резисторов  $R = 1 \text{ Ом}$ . Найдите напряжение  $U_{MN}$  на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.

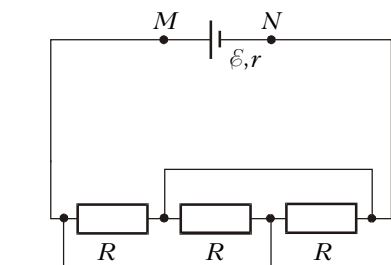


Рис. 6

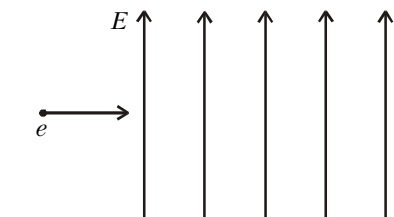


Рис. 7

8. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью  $E = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$  перпендикулярно силовым линиям (рис.7). Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона  $W_k = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$ , масса электрона  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ . Силой тяжести пренебречь.

9. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения  $\alpha = 45^\circ$ , показатель преломления стекла  $n = 1,41$ . Найдите угол  $\gamma$  между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

10. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. По другую сторону линзы находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Найдите радиус  $r$  светового пятна на экране, если известно, что расстояние от источника до линзы  $d = 30 \text{ см}$ , расстояние от линзы до экрана  $b = 80 \text{ см}$ , фокусное расстояние линзы  $F = 20 \text{ см}$ , а ее радиус  $R = 3 \text{ см}$ .

### Химический факультет

1. С наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом, с высоты  $h_1 = 2 \text{ м}$  соскальзывает небольшая шайба (рис.8). В конце спуска у

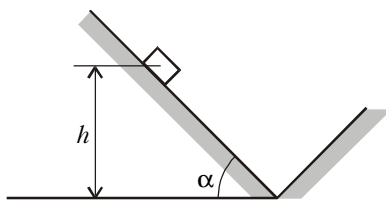


Рис. 8

основания наклонной плоскости шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту  $h_2 = 1,2 \text{ м}$ . Найдите коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью.

2. Два шарика одинаковых размеров – один деревянный, а другой из

алюминия – связаны легкой и достаточно длинной нитью. Шарик опускают в водоем, и через некоторое время оказывается, что их погружение происходит с постоянной скоростью. Найдите натяжение нити при этом движении. Массы шариков  $m_1 = 100 \text{ г}$  и  $m_2 = 300 \text{ г}$ . Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. По поверхности озера бегут волны со скоростью  $u = 2 \text{ м/с}$ . Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью  $v = 5 \text{ м/с}$ . С какой частотой волны бьются о нос лодки, если поплавок на поверхности воды колеблется с частотой  $\nu_0 = 0,5 \text{ Гц}$ ?

4. Мяч массой  $m = 0,2 \text{ кг}$  отпустили без начальной скорости с высоты  $H = 6 \text{ м}$  над полом. Найдите количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если промежуток времени между первым и вторым ударами о пол составляет  $\Delta t = 2 \text{ с}$ . Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. Два баллона с кислородом соединены трубкой с краном. Массы газа в обоих баллонах одинаковы. При закрытом кране давление в одном баллоне  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , а в другом  $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температуру в баллонах считать постоянной и одинаковой, а газ – идеальным.

6. Батарею параллельно соединенных конденсаторов с емкостями  $C_1 = 1 \text{ мкФ}$  и  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$  сначала подсоединили к источнику с ЭДС, равной  $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$  (ключ  $K$  в положении 1 на рисунке 9). Затем ключ переводят в положение 2, соединяя батарею с конденсатором емкостью  $C_3 = 3 \text{ мкФ}$ . Найдите заряд, который получит конденсатор емкостью  $C_3$ .

7. Концентрация электронов проводимости в чистом германии при комнатной температуре  $n = 3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ . Найдите, какова доля ионизированных атомов германия ( $n^+$ ). Считать, что каждый ионизированный атом теряет по одному электрону. Плотность германия  $\rho = 5400 \text{ кг/м}^3$ , молярная масса  $M = 0,073 \text{ кг/моль}$ . Число Авогадро принять равным  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

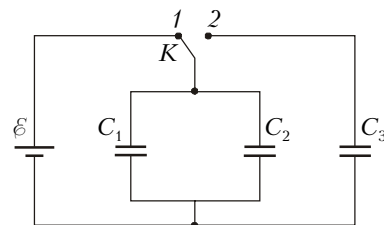


Рис. 9

8. Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором, как показано на рисунке 10. Действующее значение

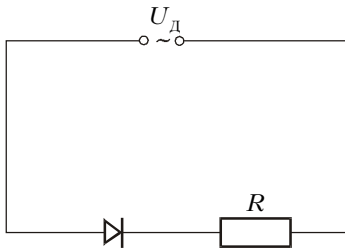


Рис. 10

напряжения источника  $U_d = 20$  В. Сопротивление резистора  $R = 12$  Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если средняя

мощность, выделяющаяся в цепи, равна  $P = 10$  Вт. Обратным током диода пренебречь.

9. В пространстве с однородными электрическим и магнитным полями движется протон. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент, когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно  $a = 10^{12}$  м/с<sup>2</sup>. Найдите напряженность электрического поля  $E$ , если скорость протона  $v = 60$  км/с, индукция магнитного поля  $B = 0,1$  Тл. Отношение заряда протона к его массе принять равным  $q/m = 10^8$  Кл/кг.

10. Имеется линза с оптической силой  $D = +2$  дптр. Стержень располагается перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух местах на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в  $\Gamma = 10$  раз больше длины стержня. Найдите расстояние между этими положениями стержня.

Публикацию подготовили  
А.Бородин, В.Галкин, Н.Григоренко,  
Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев,  
В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев,  
В.Серов, А.Склянкин, В.Сушко,  
В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков,  
Б.Щедрин