



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 1 - 2000 г. / Математический кружок

Л. Шибасов

Две задачи Архимеда

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>
<http://vivovoco.rsl.ru>

Две задачи Архимеда

В ТРАКТАТЕ «МАТЕМАТИКА» ДРЕВНЕГРЕЧЕСКОГО ученого Паппа, жившего в III веке, содержатся две задачи, решенные, как предполагают, Архимедом. Приведем эти задачи в формулировке Паппа, заменив только обозначения: вместо греческих букв будем использовать более привычные нам латинские.

Задача 1. «Возьмем три касающиеся друг друга полуокружности ADB , AEC , CFB и в заключенную между их окружностями фигуру, которую называют арбелон¹, впишем несколько кругов, касающихся друг друга и основных полуокругов (рис.1); пусть центры этих кругов будут O_1 , O_2 , O_3 , O_4 . Требуется показать, что опущенный из центра O_1 на AB перпендикуляр будет равен диаметру круга, описанного около O_1 , далее, что перпендикуляр, опущенный из O_2 , будет вдвое больше диаметра круга около O_2 , а перпендикуляр из O_3 втрое больше соответствующего диаметра, и вообще последовательные перпендикуляры будут кратными соответствующих диаметров в прогрессии натурального ряда чисел, причем вписывание кругов может продолжаться до бесконечности.»

Таким образом, в задаче утверждается, что отношения длин перпендикуляров, опущенных из центров окружностей, вписанных в арбелон, к диаметрам этих окружностей образуют последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ...

Задача 2. «Пусть ADB и AEC будут полуокружности (рис.2), опишем касательные к их окружностям круги с центрами O_1 , O_2 , O_3 , а также следующие за ними

¹ Скребок, секира, сапожный нож.

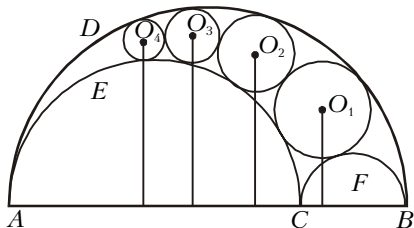


Рис. 1

вплоть до точки A . Теперь то, что опущенный из O_1 на AB перпендикуляр будет равен радиусу круга O_1 , является очевидным; еще я утверждаю, что перпендикуляр, опущенный из O_2 , будет втрое больше радиуса круга O_2 , опущенный из O_3 – в пять раз больше радиуса круга O_3 , и все следующие перпендикуляры будут больше соответствующих радиусов в кратностях последовательных нечетных чисел.»

По мнению ученых, авторство Архимеда в решении этих задач наиболее вероятно, поскольку Папп в процессе доказательства ссылается на результаты Архимеда. К тому же Архимед решал и другие задачи, связанные с арбелоном, например следующие.

Упражнения

1. Покажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на перпендикуляре CD как на диаметре (рис.3).

2. Докажите, что круги, вписанные в арбелон по обе стороны от перпендикуляра CD (рис.4), равны.

Правда, древнегреческий текст этих задач не дошел до наших дней, но сохранился его перевод на арабский язык. Переводчик, арабский математик Сабит ибн Курра (IX в.), приписывает их Архимеду.

Античные ученые решали геометрические задачи, сравнивая рассматри-

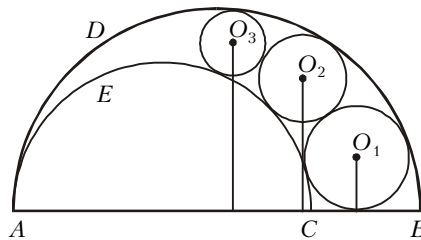


Рис. 2

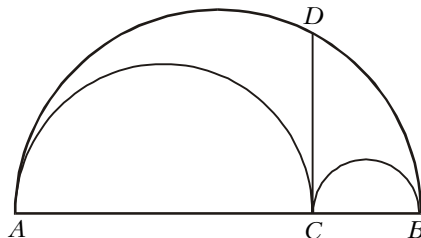


Рис. 3

ваемые отрезки и устанавливая отношения между ними. С этой целью им часто приходилось выстраивать длинные цепи пропорций – решения получались довольно громоздкими.

Оказывается, можно получить совсем короткое решение задач Архимеда и даже более общего утверждения, если обратиться к интересному преобразованию плоскости – инверсии. Древнегреческие математики воспользоваться им не могли, так как понятие инверсии появилось в математике лишь в 30-е годы прошлого столетия. И хотя на страницах «Кванта» уже рассказывалось об этом преобразовании, целесообразно вновь напомнить о нем новому поколению читателей.

Рассмотрим на плоскости окружность ω радиуса R с центром в некоторой точке O . Инверсией (от лат. inversio – переворачивание, обращение) называют такое преобразование плоскости, при котором любой точке M , отличной от O , ставится в соответствие точка M' такая, что M' лежит на луче OM и $OM \cdot OM' = R^2$. Точка O называется центром инверсии, R – радиусом инверсии, ω – базисной окружностью. Построение точки, инверсной данной, ясно из определения (рис.5): если точка M лежит внутри окружности ω , то воссоставляют в этой точке перпендикуляр к лучу OM до пересечения его в точке A с окружностью ω , а затем проводят касательную к ω в точке A ; эта касательная пересекает луч OM в искомой точке M' . Для точек, расположенных вне ω , построение проводится в обратном порядке. Приведенный способ построения может быть принят за геометрическое определение инверсии.

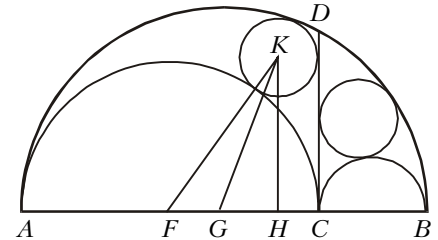


Рис. 4

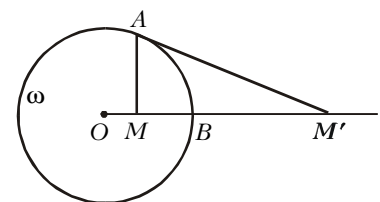


Рис. 5

Ясно, что точки базисной окружности ω при инверсии остаются неподвижными; точки, расположенные внутри базисной окружности, переходят в точки, лежащие вне ω , и наоборот; прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя (заметим, что эта прямая перпендикулярна ω). Эти свойства позволяют назвать инверсию *симметрией относительно базисной окружности*. Для полного обоснования такого названия покажем, что осевая симметрия является предельным случаем инверсии при $R \rightarrow \infty$. В самом деле, обозначим расстояния $MB = d$ и $BM' = d'$ (см. рис.5); так как $(R-d)(R+d') = R^2$, то $d' = d/(1-d/R)$. Если теперь оставить точку B на месте, а центр O по лучу BO устремить в бесконечность, то окружность ω перейдет в прямую, перпендикулярную отрезку MM' , и будет выполняться равенство $d' = d$.

Инверсия, как и осевая симметрия, часто используется при решении геометрических задач. В основном к ней обращаются, когда в условии фигурируют касающиеся окружности и прямые. Но прежде чем применять инверсию, познакомимся с некоторыми ее свойствами.

1. Окружность γ , проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, перпендикулярную линии центров данной окружности и базисной.

Пусть O_1 – центр окружности γ , проходящей через центр O инверсии. Линия центров OO_1 пересекает γ в точке A (рис.6), A' – точка, инверсная A . Покажем, что γ переходит в прямую l , пересекающую луч OO_1 в точке A' под прямым углом. Возьмем произвольную точку B на γ и построим инверсную ей точку B' . Достаточно убедиться, что угол $OA'B'$ прямой. Так как $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = R^2$, то $OA : OB = OB' : OA'$, следовательно, треугольники OBA и $OA'B'$ подобны, откуда $\angle OA'B' = \angle OBA$, а последний из них прямой (как вписанный, опирающийся на диаметр). Свойство доказано.

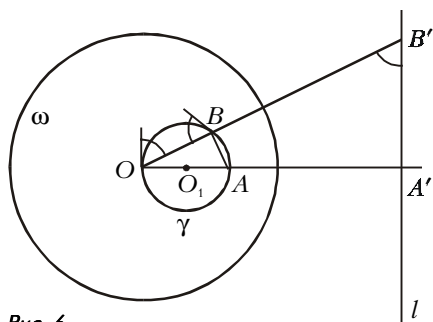


Рис. 6

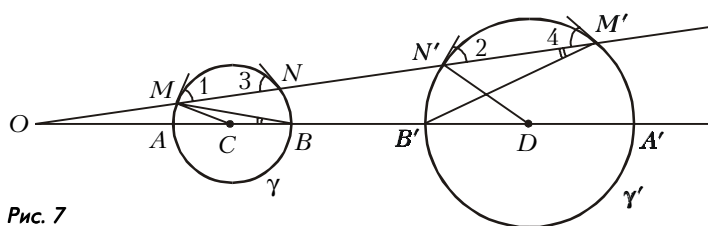


Рис. 7

Очевидно, верно и обратное утверждение: *прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии*.

2. Окружность γ , не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность γ' , также не проходящую через точку O ; причем окружности γ и γ' гомотетичны с центром гомотетии O .

Пусть O – центр базисной, а C – центр данной окружности γ (на рисунке 7 базисная окружность не изображена). Линия центров пересекает окружность γ в точках A и B . Инверсные им точки обозначим через A' и B' . Так как $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, то $OA' : OB = OB' : OA = k$. Зададим гомотетию с центром O и коэффициентом k . При этой гомотетии окружность γ с диаметром AB перейдет в окружность γ' с диаметром $B'A'$. Покажем, что γ' – окружность, инверсная γ (при этом их центры C и D не переходят друг в друга при инверсии). Возьмем на γ произвольную точку M и проведем луч OM . Пусть он второй раз пересекает окружность γ в точке N , а окружность γ' – в точках N' и M' ; здесь точка N' гомотетична точке M , а M' – точке N . Так как $CM \parallel DN'$, то центральные углы OCM и ODN' равны, и следовательно, $\angle OBM = \angle OM'B'$. Поэтому треугольники OBM и $OM'B'$ подобны, откуда $OM' : OB' = OB : OM$, или $OM \cdot OM' = OB \cdot OB' = R^2$. Таким образом, при инверсии произвольная

точка M окружности γ переходит в единственную точку M' окружности γ' . Свойство доказано.

3. При инверсии сохраняются углы между линиями.

Напомним, что под углом между двумя линиями в точке их пересечения понимается угол между касательными к ним в этой точке. Мы докажем свойство 3 применительно к прямым и окружностям.

Сначала покажем, что прямая, проходящая через центр инверсии, пересекает данную окружность и инверсную ей прямую или окружность под одинаковыми углами. В первом случае обратимся к рисунку 6 и проведем в точках O и B касательные к окружности γ . Утверждение следует из равенства отмеченных на рисунке углов. Во втором случае (см. рис.7) проведем касательные к γ в точках M и N , а к γ' в точках N' и M' . Из гомотетии окружностей получаем $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, но $\angle 1 = \angle 3$, что и доказывает наше утверждение.

Пусть теперь M – точка пересечения двух линий β и γ (каждая из них может быть окружностью или прямой); при инверсии они перейдут в линии β' и γ' , пересекающиеся в точке M' . Проведем через точки M и M' прямую l , она пройдет через центр инверсии. Углы, образованные линиями β и β' с прямой l , равны между собой; аналогично равны между собой углы, образованные γ и γ' с прямой l . Отсюда и следует свойство 3.

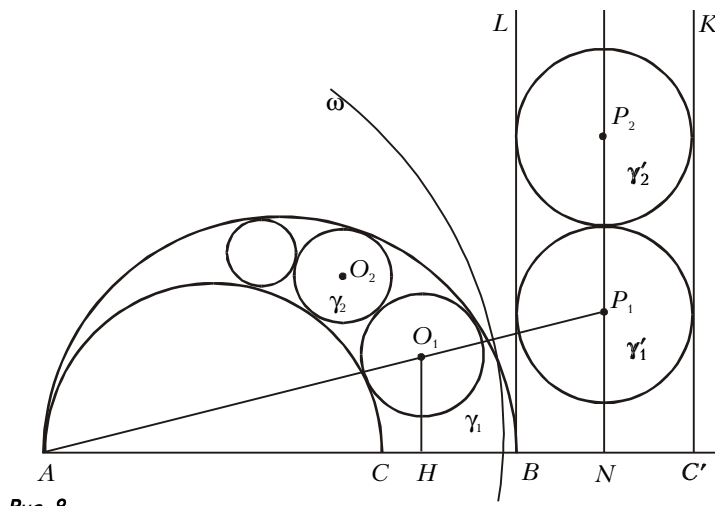


Рис. 8

А теперь сформулируем и докажем утверждение, обобщающее задачи 1 и 2 Архимеда.

Предложение. Пусть AB и AC – диаметры полуокружностей (рис.8). Впишем в образовавшийся рогавидный угол последовательность окружностей $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ с радиусами $r_1, r_2, \dots$, попарно касающихся друг друга; положение первой окружности произвольно. Обозначим через h_n длину перпендикуляра, опущенного из центра n -й окружности на AB . Отношения $x_n = h_n : r_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 2.

Доказательство. Пусть $O_1, O_2, \dots$ – центры окружностей $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Будем считать $AB = 2R, AC = 2r$. Произведем инверсию полученной конструкции относительно окружности ω произвольного радиуса с центром в точке A . На рисунке 8 взята окружность ω радиуса $2R$. В результате инверсии исходные полуокружности перейдут в лучи BL и $C'K$, перпендикулярные прямой AB , а $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – в окружности $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$, касающиеся этих лучей и попарно друг друга. (Напомним, что центры $P_1, P_2, \dots$ этих окружностей не являются инверсными для точек $O_1, O_2, \dots$.) Обозначим через ρ радиусы полученных окружностей. Опустим из центров O_1 и P_1 перпендикуляры O_1H и P_1N на прямую AB и обозначим $O_1H = h_1, P_1N = \eta$. Окружности γ_1 и γ'_1 , как и треугольники AO_1H и AP_1N , гомотетичны с одним и тем же коэффициентом гомотетии. Поэтому $x_1 = h_1/r_1 = \eta/\rho$. Для следующей окружности имеем $x_2 = h_2/r_2 = x_1 + 2$. Аналогично, для любого натурального числа n выводится рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = x_n + 2.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ представляет собой арифмети-

ческую прогрессию с разностью 2. Предложение доказано.

Чтобы получить решение задачи 1 Архимеда, нужно к последовательности $\{x_n\}$ присоединить еще один член $x_0 = 0$. При этом к последовательности вписанных окружностей присоединяется полуокружность арбелона с диаметром CB . Нужно только помнить, что в задаче 1 Архимед рассматривает отношение h_n не к радиусам r_n , а к диаметрам, поэтому у него возникает последовательность натуральных чисел, а у нас – четных чисел: 2, 4, 6, ...

Полагая в последовательности $\{x_n\}$ $x_1 = 1$, получаем последовательность нечетных чисел, т.е. решение задачи 2 Архимеда.

Архимеда интересовало и выражение для радиуса окружности, вписанной в арбелон (т.е. для r_1), через радиусы R и r исходных кругов. Он рассмотрел случай, когда $r : R = 3 : 5$ и, используя пропорциональность отрезков, получил, что $r_1 : R = 6 : 19$. Доказательство Архимеда легко может быть перенесено на любой арбелон.

Инверсия дает возможность выразить r_n через R и r для любого n при произвольном расположении первой окружности. Для упрощения вычислений проведем их лишь для случая арбелона. Оставим те же обозначения, которые использовались при доказательстве предложения; радиус базисной окружности будем считать равным $2R$. Тогда $AC' = 2R^2/r$ и $\rho = R(R-r)/r$. Центры $P_1, P_2, \dots$ окружностей $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ лежат на серединном перпендикуляре NP_1 отрезка BC' (рис.9). При инверсии относительно окружности ω этот перпендикуляр перейдет в полуокружность Γ , построенную на диаметре AN' , равном $4Rr/(R+r)$. Пусть D – центр

окружности Γ ; $M_1, M_2, \dots$ – точки пересечения Γ с $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ соответственно; инверсными им будут точки $M'_1, M'_2, \dots$. Так как при инверсии углы сохраняются, то окружность Γ пересекает каждую из окружностей γ_n под прямым углом. Обозначим $\angle BAM_1 = \varphi_0, \angle M_n AM_{n+1} = \varphi_n$ для любого номера n , тогда $\angle BDM_1 = 2\varphi_0, \angle M_n DM_{n+1} = 2\varphi_n$. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \rho / AN = (R-r)/(R+r),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1) = 3\rho / AN =$$

$$= 3(R-r)/(R+r),$$

и вообще,

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n) =$$

$$= (2n+1)(R-r)/(R+r).$$

Из треугольника $M_1 DO_1$ имеем

$$r_1 = DM_1 \operatorname{tg} \varphi_1 =$$

$$= \frac{2Rr}{R+r} \operatorname{tg}((\varphi_0 + \varphi_1) - \varphi_0) =$$

$$= \frac{2Rr}{R+r} \cdot \frac{2 \frac{R-r}{R+r}}{1 + 3 \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \frac{Rr(R-r)}{R^2 + r^2 - Rr}.$$

Это результат Архимеда для произвольных R и r . Записывая для любого n угол φ_n в виде разности $\varphi_n = (\varphi_0 + \dots + \varphi_n) - (\varphi_0 + \dots + \varphi_{n-1})$, аналогично находим

$$r_n = \frac{Rr(R-r)}{Rr + n^2(R-r)^2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что для второй задачи Архимеда (здесь $\varphi_0 = 0$)

$$r_n = \frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2 + 4n(n-1)(R-r)^2}.$$

В общем случае формулы для r_n имеют сложный вид.

В Предложении фиксированные окружности радиусов r и R касались друг друга внутренним образом. Как

(Окончание см. на с.54)

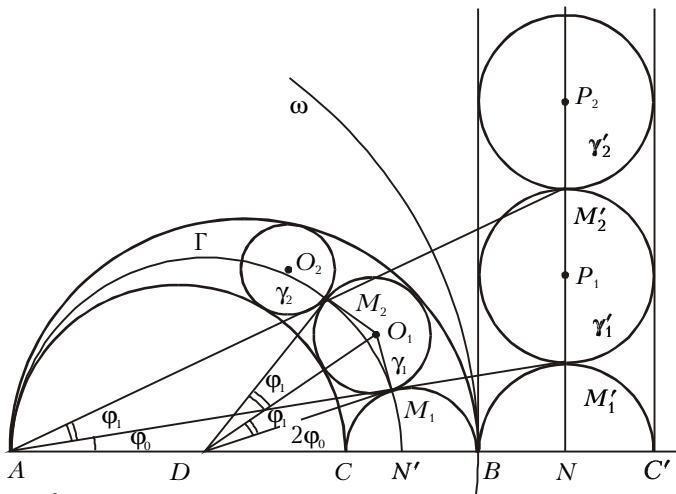


Рис. 9

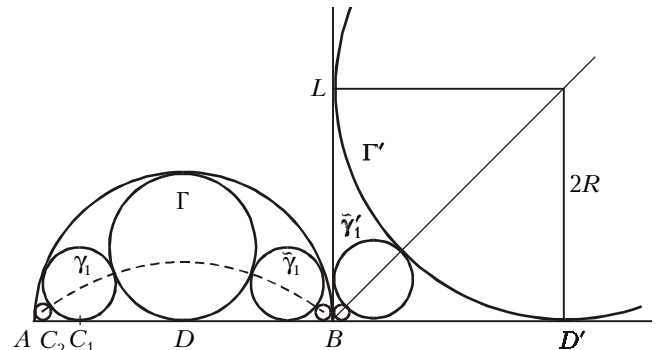


Рис. 10

видно из доказательства, утверждение остается в силе, если эти окружности будут касаться друг друга внешним образом; более того, оно верно и при замене одной из них на прямую (предельный случай окружности), касающуюся другой окружности. Если же исходная окружность или прямая и окружность не касаются друг друга, а пересекаются, то картина существенно изменится.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда окружность перпендикулярна прямой. Впишем в полукруг, построенный на диаметре $AB = 2R$, окружность Γ максимального радиуса (она касается диаметра в точке D), а затем по обе стороны от нее впишем две последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{\tilde{\gamma}_n\}$ попарно касающихся окружностей (рис.10). Вычислим радиусы r_n окружностей γ_n и $\tilde{\gamma}_n$.

Для этого произведем инверсию с центром A и радиусом $2R$. В результате полуокружность, построенная на AB , перейдет в луч BL , перпендикулярный прямой AB ; вписанные окружности перейдут в окружности Γ' , γ'_n , $\tilde{\gamma}'_n$, попарно касающиеся друг друга и сторон $\angle LBD'$. Так как D' — точка инверсная точке D , то радиус окружности Γ' равен $2R$ (проверьте), радиусы окружностей γ'_n возрастают с увеличением n , а $\tilde{\gamma}'_n$ — убывают. Отметим интересное свойство окружностей, вписанных в полукруг: точки их попарного касания расположены на дуге окружности радиуса $R\sqrt{2}$, проходящей через точки A и B . Причем окружности Γ , γ_n , $\tilde{\gamma}_n$ перпендикулярны этой дуге.

Упражнения

4. Докажите этой свойство.

5. Покажите, что радиусы любых двух соседних окружностей, вписанных в угол LBD' , относятся как $(\sqrt{2} + 1) : (\sqrt{2} - 1)$.

Для последовательности γ'_n расширяющихся окружностей, следующих за Γ' , легко найти радиус n -й окружности $R_n = 2R \cdot (\sqrt{2} + 1)^{2n}$. Ясно, что на таком расстоянии от B расположены точка C'_n (на рисунке она не изображена) касания γ'_n с прямой AB , следовательно, от центра инверсии она находится на расстоянии $d'_n = 2R \left(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n} \right)$. Обозначим через d_n расстояние от центра инверсии до точки C_n касания окружности γ_n диаметра AB . Очевидно, $d_n = 2R / \left(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n} \right)$. Из гомотетии окружностей γ_n и γ'_n имеем $R_n : r_n = d'_n : d_n = \left(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n} \right)^2$. Поэтому

$$r_n = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2n} \cdot 2R}{\left(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n} \right)^2} = \frac{2R}{\left((\sqrt{2} - 1)^n + (\sqrt{2} + 1)^n \right)^2}.$$

Ответ получен.

Найдем отношение

$$R : r_n = \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n}{\sqrt{2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} + 1.$$

$$\text{Числа } b_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}$$

имеют древнюю историю. Они возникли еще у древнегреческого математика Теона Смирнского (II в.) в процессе приближения числа $\sqrt{2}$ рациональными. Он рассмотрел две последовательности $\{\beta_k\}$ и $\{\alpha_k\}$:

$$1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \dots$$

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_k,$$

$$\beta_{k+1} = 2\alpha_k + \beta_k,$$

и показал, что отношение β_k / α_k образуют последовательные приближения числа $\sqrt{2}$. Встретившиеся у нас числа b_n равны β_{2n} .

Заметим, что числа, стоящие на четных местах последовательности $\{\alpha_n\}$, имеют вид

$$a_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2},$$

а пары (b_n, a_n) задают общее решение во множестве натуральных чисел уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$, у которого своя интересная история.