



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 1 - 2000 г. / Школа в «Кванте»

А. Стасенко

Как студент огород поливал... (9 кл.)

Сколько пузырьков в шампанском? (10-11 кл)

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

<http://vivovoco.rsl.ru>

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как студент огород поливал» предназначена девятиклассникам, заметка «Сколько пузырьков в шампанском?» – десятиклассникам и одиннадцатиклассникам.

Как студент огород поливал

КАК-ТО РАЗ, ДАВНЫМ-ДАВНО, ПОПросила бабушка внука-студента огород полить. И шланги были, и воду компрессором подали – да вот в чем заковыка: Студент был умный да еще вычитал, что «уже в 450 году до нашей эры «Кратет высказал мнение о необходимости сначала постепенной, а потом и полной замены ручного труда... автоматами». Опустил он буйну голову на широку грудь, а в груди была дума крепкая. Вспомнил он сегнерово колесо и представил себе трубку с концами, отогнутыми в противоположные стороны, да насаженную на другую трубу, подающую воду, причем та, что первая, могла свободно вращаться за счет реакции вытекающей струи. Ввел Студент обозначения (рис.1) и снова задумался.

Если v_b – скорость движения воды внутри трубки с площадью сечения S , то секундный расход воды через одно отверстие равен $Q = \rho_b v_b S$. А так как

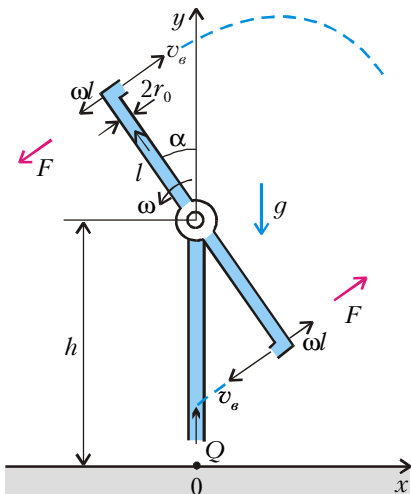


Рис. 1

жидкость несжимаема и, значит, ее плотность ρ_b постоянна, при постоянной величине S скорость воды одинакова в любом сечении трубки. (Тут Студент почувствовал, что он применил закон сохранения массы.) Если в результате выброса воды трубка длиной $2l$ приобрела угловую скорость ω , то линейная (окружная) скорость ее концов будет равна ωl и направлена противоположно скорости v_b движения воды, так что в системе координат, связанной с огородом, скорость истечения воды будет равна по величине $v_0 = v_b - \omega l$. Следовательно, поток импульса через одно отверстие равен $Q(v_b - \omega l)$, а его размерность есть $\frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \equiv \text{Н}$. Но ведь это же размерность силы F !

Таким образом, имеется пара сил – две равные по величине силы, параллельные и противоположно направленные, причем l – плечо каждой силы относительно оси вращения. В результате на трубку действует момент сил

$$F \cdot 2l = 2Q(v_b - \omega l)l. \quad (1)$$

Но до какой угловой скорости может раскрутиться трубка? И вообще, мешает ли ей что-то неограниченно ускоряться во вращательном движении? Конечно. Ну например, момент сил трения во втулке (куда же деться от трения!), сопротивление воздуха... Уж очень хотелось Студенту сказать привычные слова «сопротивлением воздуха пренебречь», но как честный человек он решил прежде всего сделать численную оценку.

Ему давно было известно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу пропорциональна квадрату скорости v тела относительно воздуха,

площади поперечного сечения $S_{\perp}$ тела и плотности воздуха ρ . Но чтобы ею пренебречь, нужно эту силу сравнить с какой-нибудь другой, которая предполагается существенно важной. Скажем, с потоком импульса массы воды, истекающей из трубки (в системе координат, связанной с самой трубкой), равным Qv_b :

$$\frac{\rho v_b^2 S_{\perp}}{Qv_b} \leq \frac{\rho \cdot (\omega l)^2 \cdot 2r_0 l}{\rho_b \pi r_0^2 v_b \cdot v_b} \sim \left(\frac{\rho}{\rho_b} \right) \left(\frac{\omega l}{v_b} \right)^2 \left(\frac{l}{r_0} \right).$$

Здесь для усиления неравенства взято наибольшее изменение скорости: $v = \omega l$, достигаемое на конце трубки, и, конечно, пренебрежено тем, что трубка при своем вращении увлекает в движение воздух. Итак, завершим оценку. Ясно, что ωl не может превосходить v_b – иначе трубка не будет раскручиваться, отношение плотностей воздуха и воды ρ/ρ_b составляет приблизительно 10^{-3} , и если взять трубку «разумных размеров» – например, $l \sim 10$ см и $2r_0 \sim 1$ см, то для искомого отношения двух сил получим величину порядка и менее 10^{-2} . Значит, с точностью до процентов можно и в самом деле пренебречь сопротивлением воздуха.

Что же осталось? Осталось приравнять ускоряющий момент реактивной силы струи (1) тормозящему моменту силы трения $M_{\text{тр}}$:

$$2Q(v_b - \omega l)l = M_{\text{тр}}.$$

Отсюда получим скорость истечения воды из трубки (в системе координат, связанной с огородом):

$$v_0 = v_b - \omega l = \frac{M_{\text{тр}}}{2lQ}$$

(как и предполагалось выше, ωl не превосходит скорости выброса воды относительно трубки).

А что дальше? А дальше, как говорят ученые, «проблема свелась к» известной школьной задаче о движении тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 из точки с координатами (см. рис.1)

$$x_0 = -l \sin \alpha, \quad y_0 = h + l \cos \alpha.$$

Решение этой задачи дает

$$x = -l \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = h + l \cos \alpha + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с. 31)

где t – время, прошедшее с момента выброса элементарной массы воды из трубки. Конечно, это решение предполагает, что элементы водяной струи или капли, образующиеся в результате дробления, никак не взаимодействуют друг с другом и с воздухом.

Для огорода очень важно, куда падает вода и в каком количестве. В принятой нами системе координат ордината почвы $y = 0$. Обозначим абсциссу точки падения воды через $x_{\downarrow}$. Исключая из последних двух уравнений время, получим

$$x_{\downarrow} = -l \sin \alpha + \frac{v_0^2 \cos \alpha}{g} \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2} \left(1 + \frac{l}{h} \cos \alpha \right)} \right). \quad (2)$$

В частности, здесь содержится хорошо известное выражение для дальности полета, соответствующее случаю вылета из начала координат ($h = 0, l = 0$):

$$x_{0\downarrow} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha.$$

В этом случае наибольшая дальность полета достигается, как известно, при $\alpha = 45^\circ$ и составляет

$$x_{0\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

В общем же случае решение, как видно из выражения (2), зависит от двух параметров: отношения начальных значений потенциальной и кинетической энергии $a = \frac{gh}{v_0^2/2}$ и геометрического параметра нашего устройства $\frac{l}{h}$. И Студент с увлечением принимаясь анализировать эти зависимости – тем более, что у него был компьютер.

Мы же ограничимся каким-нибудь характерным случаем. Например, предположим, что $l/h \ll 1$ (это означает, что вращающаяся трубка мала по сравнению с высотой ее над землей). Кроме того, предположим, что и дальность полета $x_{0\max}$ тоже много больше l , т.е. даже при выбросе воды с нулевой высоты она улетит достаточно далеко. Тогда абсцисса точки падения воды на почву, отнесенная к характерной величине (3), равна

$$\bar{x} = \frac{x_{\downarrow}}{x_{0\max}} = \cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \right).$$

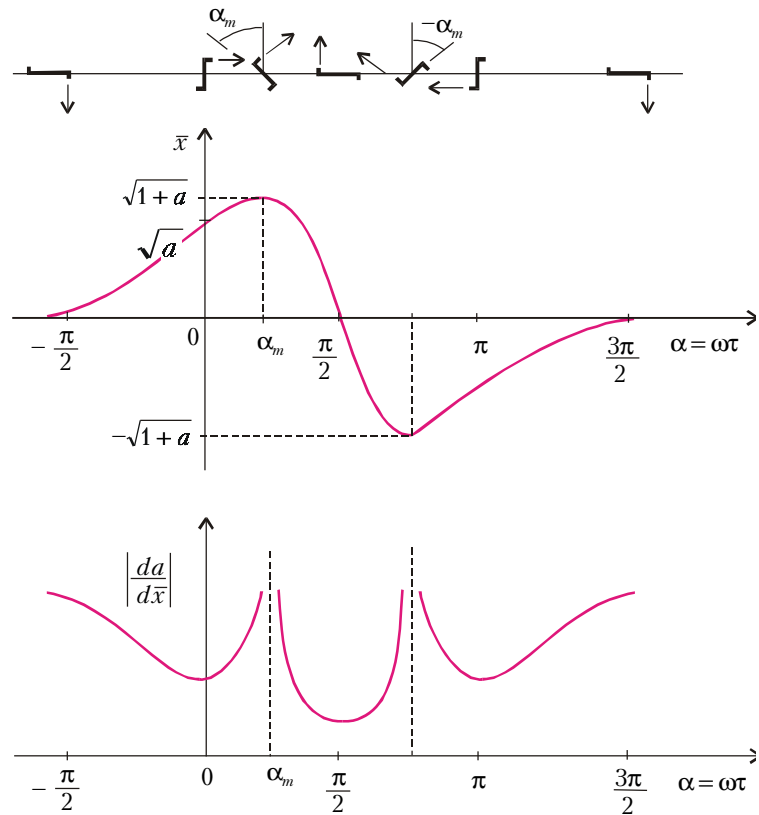


Рис. 2

Можно найти и угол вылета, соответствующий максимальной дальности, и величину самой этой дальности из условия равенства нулю производной:

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}} (1 - 2 \sin^2 \alpha - a) = 0,$$

откуда

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{1}{a+2}, \quad \bar{x}_{\max} = \sqrt{a+1}.$$

Видно, что чем выше точка вылета, тем дальше сможет достать вода и тем меньше угол, при котором достигается эта наибольшая дальность. Например, в случае $a = 1$ (начальные значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы)

$$\alpha_m = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35^\circ,$$

а дальность полета в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при вылете из точки на уровне земли (3).

На рисунке 2 приведен качественный вид зависимости относительной координаты точки падения воды на почву от угла α (или от времени, поскольку $\alpha = \omega t$). В верхней части рисунка показаны положения вращающейся трубки, соответствующие не-

скольким характерным углам. Уже из этого графика видна неравномерность полива. В нижней части этого же рисунка построен график функции $|d\alpha/d\bar{x}|$, характеризующей плотность распределения воды по поверхности почвы. Действительно, при повороте на угол $d\alpha$ вода, выброшенная за соответствующий отрезок времени $dt = d\alpha/\omega$, попадает на участок $d\bar{x}$ (считаем, что она тут же поглощается почвой). Видно, что в некоторые моменты времени плотность полива обращается в бесконечность. И понятно почему – в эти моменты (при $\alpha = \alpha_m$) струя воды, падающей на почву, на мгновение останавливается, меняя направление своего движения по поливаемой поверхности. А в изложенной теории струя считается бесконечно тонкой линией, несущей конечный расход воды.

«Но, – сказал себе Студент, – струя не линия, она уже на выходе из трубки имеет диаметр $2r_0$, а при дальнейшем движении еще может распадаться на капли, которые тормозятся в воздухе; и центробежная сила инерции может как-то изменить распределение давления по оси струи; и... следовательно, вся теория нуждается в проверке, доработке...» И много еще мыслей толпилось в голове Студента.

А что же огород? Спросите у бабушки...

Сколько пузырьков в шампанском?

В ПРИРОДЕ И В ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ практике известно немало случаев вскипания жидкостей без преднамеренного нагревания. Например: при истечении на поверхность с больших глубин, при разгерметизации трубопроводов с жидким теплоносителем (аварии энергетических установок), при раскупоривании бутылок с шампанским, пивом, содовой, спрайтом... — кто же не наблюдал с радостью искрящуюся пузырьками газированную воду в жаркий день!

При транспортировке таких жидкостей по трубам бывает важно знать, какой объем растворенных в них газов уже выделился в виде пузырьков. Конечно, можно было бы сделать забор пробы, но — пока эту пробу проанализируют, какое отношение она будет иметь к той смеси, что была в момент забора? Поэтому лучше всего воспользоваться электромагнитным полем — ведь информация о его изменениях распространяется со скоростью порядка скорости света, так что реальные технологические процессы будут казаться как бы застывшими (квазистатическими).

Рассмотрим, например, как можно воспользоваться простейшим плоским конденсатором для почти мгновенной регистрации свойств протекающей через него жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ , содержащей газовые пузыри или пузырьки, внутри которых $\epsilon_1 = 1$ (рис.1). Под «пузырями» будем понимать объемы газа, размеры которых сравнимы с характерными размерами конденсатора l и d , а

под «пузырьками» — те объемы, размеры которых существенно меньше d .

Пусть пластины конденсатора, площадью S каждая, подключены к источнику постоянной ЭДС U (батарея). Ясно, что что-то будет неодинаково в двух случаях: когда конденсатор полностью занят жидкостью или когда он содержит только газ. Что же именно?

Если пренебречь сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением источника r , то разность потенциалов между пластинами конденсатора будет постоянна и равна U . (Следовательно, электропроводность газожидкостной смеси предполагается пренебрежимо малой.) Значит, и напряженность электрического поля в обоих случаях будет одной и той же и равной $E = U/d$. А вот заряд на пластинах будет различен — ну, хотя бы потому, что емкость пустого плоского конденсатора равна $C_1 = \epsilon_0 S/d$, емкость заполненного диэлектриком в ϵ раз больше: $C_\epsilon = \epsilon C_1$, а заряд равен $q_{1,\epsilon} = C_{1,\epsilon} U$. Иными словами, сам заряд и его поверхностная плотность на пластинах в этих двух крайних случаях будут отличаться в ϵ раз:

$$q_\epsilon = \epsilon q_1, \quad \sigma_\epsilon = \epsilon \sigma_1,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \epsilon_0 \frac{U}{d}.$$

Кстати, напряженность поля между пластинами будет одинаковой, даже если диэлектрик лишь частично «вдвинут» в конденсатор, как это показано

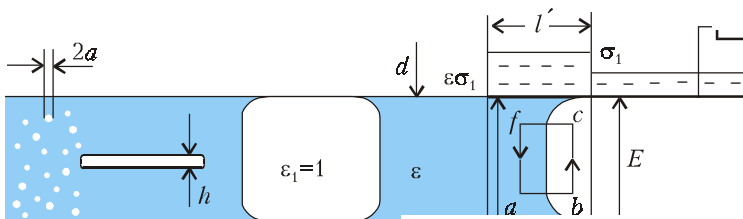


Рис. 1

на рисунке 1. (В противном случае работа по перемещению некоего заряда по пути $abcfa$ не была бы равна нулю, а это строго запрещено в электростатике.)

Легко понять, что если в данный момент времени диэлектрик занимает часть объема конденсатора, равную l'/l , то суммарный заряд на конденсаторе равен

$$q = q_1 \left(1 - \frac{l'}{l} \right) + q_\epsilon \frac{l'}{l} = \frac{\epsilon_0 S U}{d} \left(1 + \frac{l'}{l} (\epsilon - 1) \right). \quad (1)$$

Если диэлектрик будет «вдвигаться» с постоянной скоростью v , то $l' = vt$, так что в цепи потечет постоянный ток

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon_0 S U}{d} \frac{v}{l} (\epsilon - 1) \quad \text{при } 0 < t < \frac{l}{v}. \quad (2)$$

Когда жидкость заполнит весь конденсатор, заряд достигнет наибольшей величины $q_\epsilon = \epsilon q_1$ и перестанет изменяться, а когда в конденсатор начнет входить следующий газовый пузырек, заряд станет убывать с той же скоростью — ток будет отрицательным (рис.2). Таким образом, даже если наша плоская «труба» будет совершенно непрозрачной, по изменению электрического тока мы сможем «увидеть» перемежающиеся участки движущейся жидкости и газа.

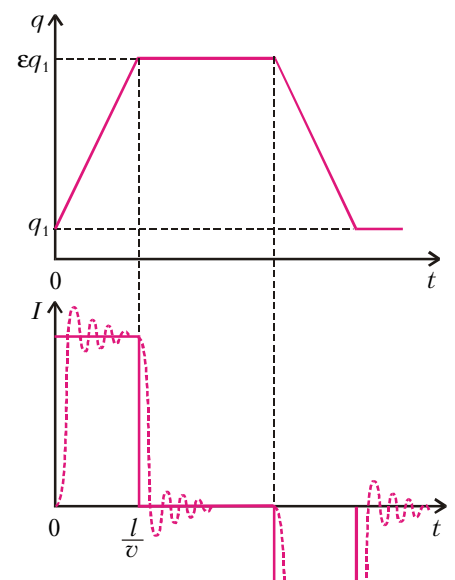


Рис. 2

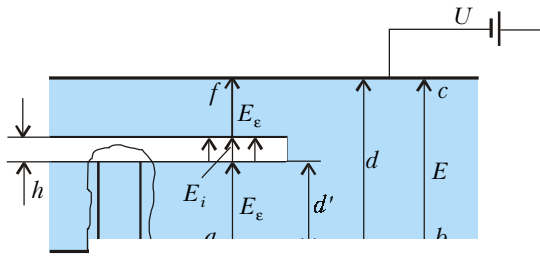


Рис. 3

Рассмотренный тип течения газожидкостной смеси (когда газовый пузырь заполняет все сечение потока) представляется нежелательным с точки зрения производства, например, газированной воды, ибо обе фазы, как видно, полностью разделены, а их как раз хотелось бы смешать. Поэтому обсудим далее более благоприятный случай. Пусть теперь газовый «пузырь» представляет собою плоскую «щель» шириной h , параллельную пластинам конденсатора (см. рис.1 и 3). По-прежнему перемещая некий пробный заряд по контуру $abcfa$ (см. рис.3), мы должны совершить нулевую работу. Другими словами, разность потенциалов между точками a и f равна таковой для точек b и c :

$$E_\epsilon(d-h) + E_i h = U, \quad (3)$$

где E_i — напряженность поля в щели, а E_ϵ — в диэлектрике (жидкости) с обеих сторон от щели. Кроме того, учтем, что

$$E_i = \epsilon E_\epsilon. \quad (4)$$

Собственно говоря, в школьном учебнике так и написано: «Диэлектрическая проницаемость среды — это физическая величина, показывающая, во сколько раз модуль напряженности электрического поля (E_ϵ) внутри однородного диэлектрика меньше модуля напряженности поля (E_i) в вакууме». И дана справедливая оговорка, что такое определение справедливо лишь в частных случаях — например, для пластин в однородном поле (и несправедливо для шаровой полости). Поэтому подумаем еще раз, что такое ϵ . (Ранее мы приняли его как множитель, который показывает, во сколько раз увеличивается емкость плоского конденсатора с диэлектриком по сравнению со случаем пустого конденсатора.) Мысленно вырежем из нашего устройства призму с поперечным сечением площадью ΔS (рис.4). Пластина конденсатора несет заряд $+\sigma\Delta S$, и поле над этой пластиной (в вакууме) равно $E_i = \sigma/\epsilon_0$ (а ниже этой пластины, т.е. вне конденсатора, оно равно нулю). Кусок диэлектрика в выделенной призме, попав во внешнее (по отношению к нему) поле E_i , поляризуется. Этот факт условно показан в виде не-

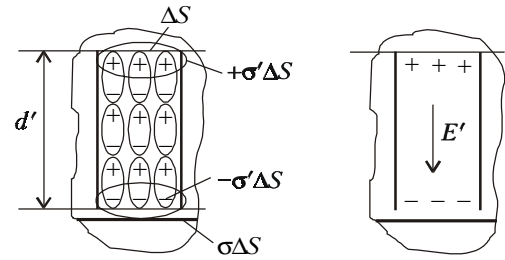


Рис. 4

скольких диполей, выстроившихся вертикально. Видно, что внутри диэлектрика заряды противоположных знаков, принадлежащие соседним диполям, компенсируют друг друга, а на поверхностях диэлектрика торчат их «хвосты» с зарядами $\pm\sigma'\Delta S$. Дипольный момент этого призматического куска диэлектрика равен $\Delta p = \sigma'\Delta S d'$ и направлен вверх (от отрицательного заряда к положительному). А напряженность поля, порожденного этими поляризационными зарядами, равна $E' = -\sigma'/\epsilon_0$ и направлена противоположно дипольному моменту и внешнему полю. Таким образом, напряженность суммарного электрического поля равна

$$E_\epsilon = E' + E_i = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Остался последний шаг. Введем еще одно понятие — объемную плотность дипольного момента:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S d'} = \sigma' = -\epsilon_0 E'.$$

Вот она-то и связана с суммарным полем в диэлектрике соотношением

$$P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_\epsilon,$$

которое и можно считать более общим локальным определением диэлектрической проницаемости, приемлемым для любой точки однородного или неоднородного диэлектрика.

Из соотношений (3) и (4) легко найти электрический заряд на пластинах в том случае, когда рассматриваемый газовый «пузырь» длиннее длины конденсатора l (и выступает за его края):

$$q = \epsilon_0 \epsilon S E_\epsilon = \epsilon_0 S \frac{U}{d} \langle \epsilon \rangle.$$

Здесь введено обозначение средне-объемной диэлектрической проницаемости

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon}{1 + (\epsilon - 1)h/d},$$

которая учитывает долю объема h/d , занятую плоским «пузырем».

Если теперь аналогично (1) рассмотреть процесс постепенного вдвигания этого «пузыря» в конденсатор с постоянной скоростью v , то аналогич-

но (2) можно найти ток в цепи:

$$I = \frac{-\epsilon_0 S U}{d} \frac{v}{l} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)h/d}{1 + (\epsilon - 1)h/d}.$$

Это выражение явно отличается от выражения (2) и совпадает с ним по модулю лишь в случае $h/d \rightarrow 1$, когда в конденсатор вдвигается газовый пузырь (см. падающую ветвь $I(t)$ на рисунке 2).

Но пора вспомнить о пузырьках (см. левую часть рис.1), таких маленьких и круглых. Хотя каждый из них мал, их суммарный относительный объем может изменяться в широких пределах — от нуля (совсем нет газовой фазы) до единицы (все пузырьки слились в один газовый «снаряд»). Трудность описания такой среды усугубляется тем, что радиусы пузырьков могут быть различны, расстояния между ними случайны; сталкиваясь, они могут сливаться в более крупные или дробиться. А тут еще электрическое поле, которое поляризует их и заставляет дополнительно взаимодействовать, как и положено диполям. Кстати, а в каком поле находится каждый из них? Конечно, в поле, порожденном всеми зарядами — и свободными (на проводящих пластинах конденсатора), и связанными (поляризационными). И что же означают слова «пузырек находится в поле»? По-видимому, это значит, что он находится в поле, которое осталось бы, если бы пузырек был удален, — тогда в возникшей полости осталось бы поле, порожденное всеми оставшимися электрическими зарядами. С этой проблемой до нас мучились многие замечательные ученые: Ленгмюр, Клаузиус, Моссоги, Лоренц и др.

Все эти слова сказаны для того, чтобы обрисовать сложность проблемы. Конечно, ученый скажет так: давайте разобьем проблему на части. Сначала рассмотрим один сферический пузырек в безграничной жидкости, в которой достаточно далеко от пузырька (на «бесконечности») задано однородное поле E_ϵ . Потом предположим, что пузырьков много — N

штук в кубическом метре, но все они одинаковы и находятся в среднем на одном и том же расстоянии друг от друга — порядка $1/\sqrt[3]{N}$. И в результате найдем некоторую эффективную, или среднеобъемную, диэлектрическую проницаемость такой пузырьковой жидкости. Но даже эту скромную программу выполнить не очень легко, да это и не обязательно делать сейчас до конца — на основе двух рассмотренных выше примеров ясно, что результат будет зависеть от суммарного объема пузырьков, попавших в конденсатор, и что временная зависимость тока будет скорее всего иной, чем в упомянутых примерах.

А что еще мы не учли в этих случаях? Многое. Например, что диэлектрик втягивается в конденсатор. Это значит, что в первом случае «снарядного» течения газовый пузырь, попавший в конденсатор, будет сжиматься слева и справа двумя пробками жидкости. То же самое будет происходить и с пузырьковой жидкостью, если суммарный объем пузырьков будет непостоянен в пространстве, так что дви-

жение такой газожидкостной смеси в конденсаторе не будет равномерным.

Далее, в реальности существует сопротивление проводов и внутреннее сопротивление источника напряжения. Если их сумма равна r , то разность потенциалов между пластинами конденсатора запишется в виде

$$\frac{q}{C(t)} = U - rI(t)$$

и уже не будет постоянной величиной. А если учесть еще индуктивность цепи L и соответствующую ей ЭДС самоин-

дукции $-L \frac{dI}{dt}$, то закон Кирхгофа даст страшное дифференциальное уравнение для заряда:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = U,$$

которое описывает затухающие колебания. Решить это уравнение сложно, так как емкость конденсатора изменяется со временем (в этом-то и состоит суть метода), но можно ожидать, что на вышечерисованные кривые зависимости заряда и тока от времени нало-

жятся «гармошки» колебаний (см. рис.2, точечные кривые).

Кроме того, можно предложить и другую схему измерений. Например, зарядить конденсатор от какого-либо источника, затем отключить последний и сохранять на пластинах постоянный заряд (вот тут-то и пригодится пренебрежимо малая электропроводность жидкости). Тогда при прохождении через конденсатор жидкости с различным содержанием газа в пузырьках будет изменяться разность потенциалов между пластинами. Такие приборы существуют и называются *емкостными датчиками*.

Надо признаться, что такими способами мы найдем только суммарный относительный объем газовой фазы, а не концентрацию пузырьков. Не худо было бы определить как-нибудь и их средний размер. Нужно, следовательно, использовать еще какие-то физические явления и приборы (например, оптические)... Так что, прежде чем открыть бутылку нарзана, подумайте о числе пузырьков и законах физики. И — приятного аппетита!