



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 2 - 2000 г. / Калейдоскоп «Кванта»

Н. Авилов

Сюрпризы таблицы умножения

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>
<http://vivovoco.rsl.ru>

Сюрпризы таблицы умножения

Впервые таблица Пифагора примерно в таком виде, в каком мы ее находим на обложках тетрадей, появилась в сочинении неопифагорейца Никомаха Геразского (I–II вв.). В его «Введении в арифметику» таблица выполнена в ионийской нумерации. По словам Никомаха, эта таблица восходит «к самому Пифагору».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.1. Таблица Пифагора

Более древние таблицы умножения обнаружены в месопотамских глиняных табличках – их «возраст» около 5 тысяч лет.

Таблица умножения скрывает в себе множество замечательных математических закономерностей, поиск которых может превратиться в увлекательное занятие, сулящее немало сюрпризов.

Назовем *квartetом* четыре числа таблицы Пифагора, расположенных в вершинах некоторого квадрата. Оказывается, что если стороны этого квадрата параллельны диагоналям таблицы Пифагора, то суммы диагональных чисел *квartetа* равны (рис.2). Если стороны квадрата параллельны сторонам таблицы, то равны произведения диагональных чисел *квartetа*. Если при этом квадрат расположен симметрично главной диагонали таблицы Пифагора, то сумма всех чисел *квartetа* – квадрат некоторого натурального числа, и это свойство является хорошей иллюстрацией тождества: $(a+b)^2 =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$6 + 18 = 4 + 20, \quad 6 \cdot 30 = 12 \cdot 15, \\ 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 9 + 9^2 = 256$$

Рис.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$20 = (9 + 12 + 24 + 35) : 4$$

Рис.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$S_1 = 12 \cdot 13 = 156, S_2 = 7,5 \cdot 6,5 \cdot 12 = 585$$

Рис.4

$= a^2 + 2ab + b^2$. Доказательства этих свойств просты и основаны на определении таблицы Пифагора, а

именно: каждое число таблицы равно произведению номера строки и номера столбца, на пересечении которых оно стоит.

Если центром *квartetа* тоже является число таблицы Пифагора, то оно равно среднему арифметическому чисел этого *квartetа* (рис.3). И опираясь на это свойство, легко доказать, что сумма всех чисел таблицы Пифагора, расположенных внутри центрально-симметричной фигуры показанного на рисунке 4 вида, равна произведению центрального числа на количество чисел фигуры. При отсутствии центрального числа вместо него берется дробное число, равное произведению гипотетических дробных номера строки и номера столбца.

Скучную, на первый взгляд, задачу вычисления суммы всех чисел таблицы Пифагора можно решить, получив при этом немалое удовольствие: поскольку $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, то сумма чисел таблицы будет равна

$$1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \dots + 9 \cdot 45 = \\ = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = \\ = 45 \cdot 45 = 2025.$$

Красиво, не правда ли?

Заметим также, что все числа таблицы Пифагора можно разбить на девять групп по девять чисел в каждой так, что произведения чисел в каждой группе окажутся равными (рис.5). Разбивая числа на группы, нужно соблюдать правило: числа одной группы должны стоять в клетках таблицы так, чтобы установленные на них шахматные лады были дружелюбными, т.е. не угрожали друг другу. В этом случае все девять произведений будут равны

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^2 = (9!)^2.$$

На рисунке 6 в таблице Пифагора выделены «уголки». Суммы чисел в уголках образуют последо-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.5

вательность кубов натуральных чисел.

Не нарушая принципиального построения таблицы Пифагора, ее

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.6

можно расширить вправо и вниз, соблюдая основное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит. На рисунке 7 изображена верхняя часть расширенной таблицы Пифагора, повернутая на 45°. Естественно, все ранее сформулированные свойства таблицы Пифагора остаются верными и для расширенной таблицы, поэтому в дальнейшем расширенную таблицу также будем называть таблицей Пифагора.

Рассмотрим колонки чисел, расположенных параллельно биссектрисе «числового угла» (рис.8). На самой биссектрисе расположе-

1
2 2
3 4 3
4 6 4 6 4
5 8 9 8 5
6 10 12 12 10 6
7 12 15 16 15 12 7
8 14 18 20 20 18 14 8
9 16 21 24 25 24 21 16 9
10 18 24 28 30 30 28 24 18 10
11 20 27 32 35 36 35 32 27 20 11

Рис.7

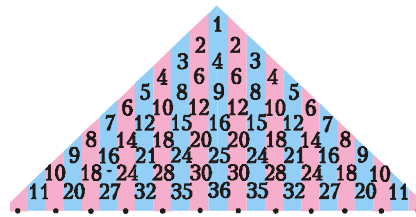


Рис.8

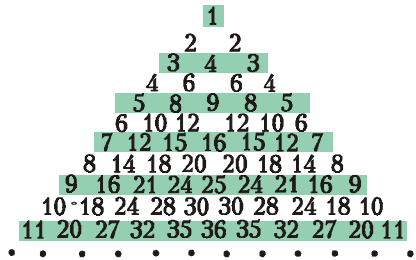


Рис.9

на последовательность квадратных чисел, а параллельно и рядом с ней расположены удвоенные треугольные числа. (Напомним, что треугольными называют числа, показывающие, из скольких кругов можно сложить треугольник: 1, 3, 6, 10, 15, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...). Во всех красных колонках расположены числовые последовательности, свя-

$$5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 =$$

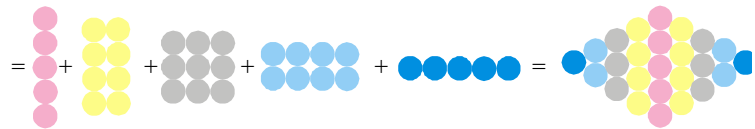


Рис.10

занные с треугольными числами, а в синих колонках – с квадратными числами. Попробуйте установить эту связь самостоятельно.

Группы чисел 1; 2,2; 3,4,3; 4,6,6,4; ... назовем *строками расширенной таблицы Пифагора* (рис.9). Произведение чисел n -й строки равно $(n!)^2$, потому что числа этой строки можно представить в таком виде: $1n$, $2(n-1)$, $3(n-2)$, ..., $(n-2)3$, $(n-1)2$, $n1$, а произведение таких чисел равно $(n!)^2$.

Сумма чисел n -й строки таблицы Пифагора равна n -му тетраэдральному числу и может быть вычислена по фор-

муле $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (Тетраэдральными числами называют числа, показывающие, из скольких шаров можно сложить треугольную пирамиду.) На рисунке 10 показан процесс рождения тетраэдрального числа из чисел 5-й строки.

Сумма же всех чисел n первых строк таблицы равна n -му гипертетраэдральному числу $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ (аналог треугольных чисел для пространства четырех измерений).

Как вы уже успели, наверное, заметить, в свойствах этой таблицы тесно переплетаются треугольные и квадратные числа. Вот еще одно свойство: разность между суммами n -й и $(n-1)$ -й строк таблицы равна n -му треугольному числу, а разность между суммами n -й и $(n-2)$ -й строк равна n -му квадратному числу.

Умножение в шутку и всерьез

1. Сколько будет: два десятка умножить на три десятка?

2. Одно яйцо варят три минуты. Сколько минут надо варить 5 яиц?

3. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, записывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных – минус. Зависит ли последний оставшийся на доске знак от того, в каком порядке стирать знаки?

Н.Авилов

