



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 1 - 2000 г. / Практикум абитуриента

В. Чивилёв

Закон сохранения импульса

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>
<http://vivovoco.rsl.ru>

в решении задачи следует обращаться к равенствам (3) и (4) и анализировать их. Иногда можно считать, что величины $F_{\text{ср}} \Delta t$ или $F_{x \text{ ср}} \Delta t$, характеризующие импульс силы, малы. Тогда из (3) или (4) следует, что $\vec{p} \approx \text{const}$ или $p_x \approx \text{const}$. Такая ситуация встречается при некоторых взаимодействиях тел системы – таких, как удары, когда Δt мало, а $F_{\text{ср}}$ или $F_{x \text{ ср}}$ ограничены из-за ограниченности значений F или F_x в течение опыта.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Автор всех разобранных задач, включая и задачи для упражнений, – автор этой статьи.

Задача 1. После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой $m_1 = 4$ кг полетел вертикально вниз со скоростью $v_1 = 150$ м/с, осколок массой $m_2 = 3$ кг полетел горизонтально на юг со скоростью $v_2 = 100$ м/с, осколок массой $m_3 = 1$ кг – горизонтально на восток. Осколок массой $m_4 = 3,5$ кг полетел со скоростью $v_4 = 200$ м/с. Найдите скорость осколка массой m_3 .

Рассмотрим систему из четырех осколков. За малое время разрыва Δt действием внешних сил – сил тяжести – можно пренебречь, поскольку за то время они не вызывают существенного изменения импульса осколков из-за их малости по сравнению с внутренними силами, действующими между осколками. Поэтому можно считать, что импульс системы сохраняется (приближенно):

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + m_4 \vec{v}_4 = 0.$$

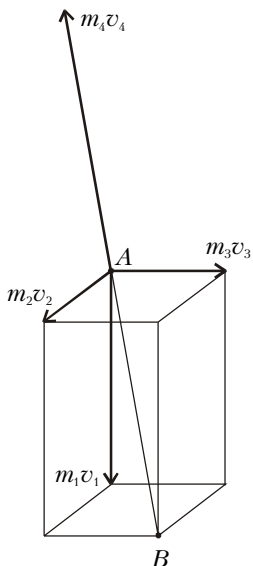


Рис. 1

Длина вектора $m_4 \vec{v}_4$ равна длине диагонали AB прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $m_1 \vec{v}_1$, $m_2 \vec{v}_2$ и $m_3 \vec{v}_3$ (рис.1). Следовательно,

$$(m_4 v_4)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + (m_3 v_3)^2.$$

Из последнего равенства находим

$$v_3 = \frac{\sqrt{(m_4 v_4)^2 - (m_1 v_1)^2 - (m_2 v_2)^2}}{m_3} = 200 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Между шариками с массами m и M , связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью k , сжатая на некоторую величину (рис.2). Система движется со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через центры шариков. Нить пережигают, и один из шариков останавливается. Найдите начальную величину сжатия пружины.

Система из шариков, пружины и нити предполагается замкнутой. В зем-

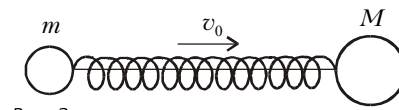


Рис. 2

ных условиях смоделировать процесс, описанный в задаче, можно на гладком горизонтальном столе. Ясно, что остановиться может только левый шарик, так как пружина на него действует силой, направленной против его начальной скорости. Пусть скорость правого шарика после распрямления пружины равна $\vec{v}$. По закону сохранения импульса,

$$(m + M) \vec{v}_0 = M \vec{v}.$$

Заметим, что совпадение направлений скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ следует именно из последнего равенства. Взяв модули от левой и правой частей этого равенства (точнее, записав равенство в проекциях на ось X , направленную вдоль оси пружины), получим

$$(m + M)v_0 = Mv.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{(m + M)v_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Исключая из последних двух уравнений v , находим искомую величину сжатия пружины

$$x = v_0 \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right) \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Задача 3. Кусок пластины массой $m = 32$ г попадает в брусок массой $6m$, двигавшийся по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.3), прилипает к бруску и далее движется с ним по столу. Перед ударом скорость куска пластины равна $v = 7$ м/с и направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, а скорость бруска равна $v/4$ и лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластины. Определите скорость бруска с пласти-

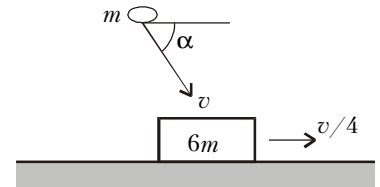


Рис. 3

ном после удара. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластины и окружающих тел?

Внешние силы, действующие на систему из бруска и пластины за время их взаимодействия Δt , – это силы тяжести $m\vec{g}$ и $6m\vec{g}$ и зависящая от времени сила $\vec{N}(t)$ нормальной реакции стола на брусок, направленная вертикально вверх. Ясно, что сумма внешних сил

$$\vec{F} = m\vec{g} + 6m\vec{g} + \vec{N}(t)$$

в произвольный момент интервала времени Δt не равна нулю. Этим и объясняется, что импульс системы не сохраняется. Впрочем, несохранение импульса сразу бросается в глаза – начальный суммарный импульс системы направлен вправо и вниз, а конечный – вправо и горизонтально.

Если импульс системы не сохраняется, то следует поискать ось в пространстве, для которой сохраняется проекция импульса системы. Поэтому проанализируем выражение для $\vec{F}$. Ясно, что для горизонтальной оси X , направленной вдоль начальной скорости бруска, $F_x = 0$ в любой момент из интервала Δt , поэтому проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$mv \cos \alpha + 6m \frac{v}{4} = (m + 6m)u,$$

откуда и находим скорость бруска с пластиной:

$$u = \frac{(\cos \alpha + 3/2)v}{7} = \frac{2v}{7} = 2 \text{ м/с}.$$

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

Величину ΔW увеличения внутренней энергии бруска, пластилина и окружающих тел найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{6m(v/4)^2}{2} = \frac{(m+6m)u^2}{2} + \Delta W,$$

откуда, с учетом выражения для u , получаем

$$\Delta W = \frac{45}{112} mv^2 = 0,63 \text{ Дж}.$$

Задача 4. Пуля летит горизонтально со скоростью v_0 , пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола небольшую коробку и вылетает в том же направлении с вдвое меньшей скоростью. Масса коробки в 5 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ . Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. На какое расстояние передвинется при этом коробка?

Рассмотрим систему из коробки и пули. Пусть масса пули m , масса коробки $5m$, скорость коробки сразу после вылета пули v . За время взаимодействия Δt (пролета пули через коробку) на систему действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести mg и $5mg$, направленная вертикально вверх и мало изменяющаяся со временем сила нормальной реакции стола $\vec{N}$ и направленная против скорости коробки сила трения со стороны стола $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис.4).

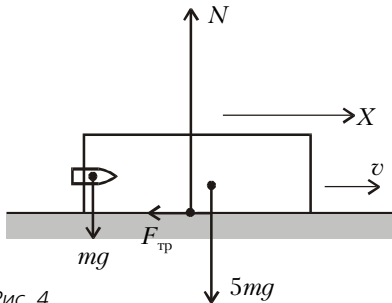


Рис. 4

Ясно, что сумма внешних сил $\vec{F} = m\vec{g} + 5m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ в течение Δt не равна нулю. Не равна нулю и проекция F_x на горизонтальную ось X , направленную вдоль скорости коробки: $F_x = -F_{\text{тр}}$. Но действием ограниченной по величине силы трения за малое время пролета Δt можно пренебречь и считать, что $F_x \Delta t = 0$. Тогда за время пролета пули проекция на ось X импульса системы сохраняется (приближенно):

$$mv_0 = \frac{mv_1}{3} + 5mv,$$

откуда и находим скорость коробки:

$$v = \frac{2}{15} v_0.$$

После вылета пули скорость коробки с течением времени уменьшается под действием силы трения, равной $5\mu mg$. Расстояние s , на которое передвинется коробка, найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{5mv^2}{2} = 5\mu mgs,$$

и

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2v_0^2}{225\mu g}.$$

Задача 5. Трубка в форме петли укреплена на бруске, находящемся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.5). Нижний конец трубки

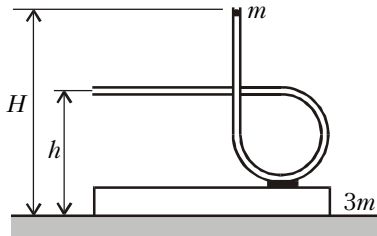


Рис. 5

горизонтален и находится на расстоянии h от стола. Шарик массой m , который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте H от стола. Масса платформы с трубкой $3m$. Вначале система покоилась. Шарик отпустили. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) брусок закреплен на столе; 2) брусок не закреплен и после вылета шарика движется поступательно.

1) В случае закрепленного бруска скорость v_1 вылетевшего шарика найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$mgH = mgh + \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h)}.$$

2) В случае незакрепленного бруска будем рассуждать так. Пусть шарик вылетел из трубки со скоростью v_2 , а брусок с трубкой приобрел скорость u в противоположном направлении. На систему из шарика и бруска с трубкой за время Δt движения шарика в трубке действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести mg и $3mg$ и направленная вертикально вверх и зависящая от времени сила нормальной реакции стола

$\vec{N}(t)$. Заметим, что Δt здесь не считается малым! Направим ось X горизонтально в направлении скорости вылетевшего шарика. Ясно, что проекция на ось X суммы всех трех вертикальных сил равна нулю в любой момент из интервала времени Δt . Значит, проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$0 = mv_2 - 3mu.$$

По закону сохранения и превращения энергии,

$$mgH = mgh + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{3mu^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений находим скорость шарика:

$$v_2 = \sqrt{\frac{3g(H-h)}{2}}.$$

Упражнения

1. Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки массами $m_1 = 3 \text{ кг}$, $m_2 = 2 \text{ кг}$ и $m_3 = 4 \text{ кг}$ полетели, соответственно, со скоростями $v_1 = 200 \text{ м/с}$ вертикально вверх, $v_2 = 150 \text{ м/с}$ горизонтально на север и $v_3 = 100 \text{ м/с}$ горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвертый осколок?

2. Камень массой $m = 1 \text{ кг}$ подняли на некоторую высоту и отпустили без начальной скорости. Через время $t = 1 \text{ с}$ практически свободного падения камень попал в ящик с песком массой $5m$, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v = 6 \text{ м/с}$. Найдите скорость ящика с камнем. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика, песка, камня и окружающих тел?

3. Трубка в виде петли жестко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.6). Правый конец трубки горизонтален, его расстояние до стола h . В трубке на высоте H удерживается шарик массой m , который может скользить по трубке без трения. Масса платформы с трубкой $4m$. Система покоится. Шарик отпускают. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) платформа закреплена на столе; 2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.

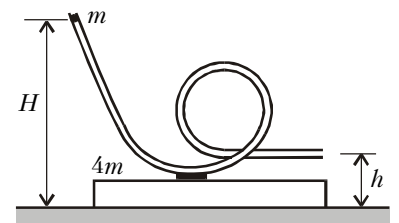


Рис. 6