



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 2 - 2000 г. / Школа в «Кванте»

Л. Семёнова

Периодические дроби

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>
<http://vivovoco.rsl.ru>

Периодические дроби

Е. Н. А. И. И. А. А.

КАК ВЫ ЗНАЕТЕ, ОБЫКНОВЕННАЯ дробь – это число, составленное из целого количества долей единицы.

Дробь записывают в виде $\frac{m}{n}$ или m/n , где числитель m – целое число, а знаменатель n – натуральное число. Для получения дроби m/n надо разделить единицу на n равных частей и взять m таких частей. Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число. Благодаря этому любые две дроби k/l и m/n можно привести к общему знаменателю ln , заменив их на $kn/(ln)$ и $ml/(ln)$.

Если числитель и знаменатель дроби имеют отличный от единицы общий делитель, то дробь можно сократить – разделить на него числитель и знаменатель. Вследствие этого всякую дробь можно представить в несократимом виде, т. е. в виде дроби, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа¹. Например, $120/344 = \frac{120}{344} = \frac{15 \cdot 8}{43 \cdot 8} = \frac{15}{43}$, а $15/43$ – равная ей несократимая дробь.

Дробь m/n называют *правильной*, если $0 \leq m < n$. Всякую дробь можно единственным образом представить в виде суммы целого числа $[m/n]$ (целой части дроби m/n) и правильной дроби $\{m/n\}$ (дробной части). Например,

$$\frac{91}{17} = \frac{5 \cdot 17 + 6}{17} = 5 + \frac{6}{17}.$$

Сумму и разность дробей с одинаковыми знаменателями определяют по правилам:

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}.$$

¹ Числа m и n называют взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1, т. е. если число m не делится ни на один из простых делителей числа n .

Чтобы сложить или вычесть дроби k/l и m/n с разными знаменателями, их предварительно приводят к общему знаменателю. Обычно в качестве него берут наименьшее общее кратное НОК $[l, n]$ чисел l и n .

Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548–1620) предложил использовать десятичные дроби, т. е. дроби, знаменатели которых – степени числа 10. Складывать, вычитать и сравнивать² их легче, чем обыкновенные дроби. Десятичные дроби обычно пишут без знаменателя, например, $\frac{5481475}{10000} = 548,1475$ и $\frac{23}{1000} = 0,023$.

Известно вам и то, что рациональное число (обыкновенная дробь) – это периодическая десятичная дробь, а иррациональное – непериодическая. Но далеко не каждый может объяснить, почему это так. А уж на вопросы: «Какова длина периода десятичного представления дроби $1/7$? Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны 6 и 12?» – ответят очень и очень немногие.

Эта статья – обстоятельный рассказ о связи между обыкновенными и периодическими десятичными дробями. Мы научимся решать некоторые весьма непростые задачи и докажем одну из важнейших теорем арифметики – теорему Эйлера (и ее частный случай – малую теорему Ферма). Но не будем торопиться, а разберем все по порядку.

От обыкновенной дроби – к десятичной

Как записать обыкновенную дробь m/n в десятичной системе счисления? Если n – степень двойки, степень пятёрки или произведение степеней двой-

ки и пятёрки, то получится – конечная десятичная дробь. Например,

$$\frac{13}{64} = \frac{13 \cdot 15625}{64 \cdot 15625} = \frac{203125}{1000000} = 0,203125;$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = 0,12;$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0,075.$$

Хотя число 35 не является произведением степеней двойки и пятёрки, сократимая дробь $7/35$ представима в виде конечной десятичной дроби:

$$7/35 = 1/5 = 0,2.$$

Но если дробь m/n несократима и при этом хотя бы один из простых делителей числа n отличен от 2 и 5, то m/n нельзя представить в виде конечной десятичной дроби³.

Переводить дроби из обыкновенных в десятичные можно делением «уголком». Например, разделим 3 на 7:

$$\begin{array}{r} 3 \mid 7 \\ 0 \mid 0,4285714 \\ \hline 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ \dots \end{array}$$

Целая часть равна 0. Чтобы получить первую цифру после запятой, разделим 30 на 7. Получим частное 4 и остаток 2. Разделив 20 на 7, получаем частное 2 и остаток 6. Следующий шаг – деление 60 на 7 – дает частное 8 и остаток 4. Далее,

$$40 = 5 \cdot 7 + 5,$$

$$50 = 7 \cdot 7 + 1,$$

$$10 = 1 \cdot 7 + 3.$$

Мы вернулись к задаче деления 3 на 7; произошло заикливание: если продолжим деление, то опять получим

³ Действительно, если $m/n = a/10^b$, то $10^b m = an$; рассмотрев любой отличный от 2 и 5 простой делитель p числа n , приходим к противоречию: an кратно p , а равное ему число $10^b m$ – не кратно.

частное 4 и остаток 2, затем будем делить 20 на 7, и так далее:

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571428571...$$

Обычно этот результат записывают короче:

$$\frac{3}{7} = 0,(428571),$$

т.е. заключают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «428571 в периоде»⁴.

Если повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую десятичную дробь называют *чисто периодической*; в противном случае говорят, что дробь имеет *предпериод* и называют ее *смешанной периодической*.

Теорема 1. Десятичное представление дроби m/n , где m, n – натуральные числа, $m < n$, – периодическая дробь, длина наименьшего периода которой не превосходит $n - 1$.

Доказательство. Чтобы получить первую цифру после запятой, мы приписываем к m нуль (т.е. умножаем m на 10) и делим (с остатком) полученное число на n . Вообще весь процесс деления уголком – повторяемое вновь и вновь умножение очередного остатка на 10 и деление (с остатком) на n .

Если на каком-то шаге получится нулевой остаток, то дробь – конечная. Конечную дробь, приписав к ней справа бесконечно много нулей, естественно считать периодической с периодом длины 1. По условию, $1 \leq n - 1$, так что в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Если же процесс деления никогда не закончится, то будут получаться только ненулевые остатки, т.е. числа от 1 до $n - 1$. Значит, не позже чем на n -м шаге остаток повторится. С этого момента процесс деления заикнется, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Убедитесь, что а) $1/3 = 0,(3)$; б) $1/6 = 0,1(6)$; в) $7/30 = 0,2(3)$; г) $7/11 = 0,(63)$.

2. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

3. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9999999. г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\dots9}_n = 0,\underbrace{00\dots01}_{n-1}$.

4. Проверьте равенства а) $0,(6) + 0,(5) = 1,(2)$; б) $0,(845) + 0,(49) = 1,(340795)$; в) $2,70(584) + 6,917(49) = 9,623(340795)$.

От периодической десятичной дроби – к обыкновенной

Пусть

$$x = 0,11111...$$

Тогда

$$10x = 1,1111...,$$

откуда

$$10x = 1 + x,$$

т.е. $x = 1/9$. Мы получили замечательный результат:

$$0,11111... = 1/9.$$

Это равенство не приближенное, а точное: бесконечная десятичная периодическая дробь $0,(1)$ является в точности тем же самым числом, что и обыкновенная дробь $1/9$. (Между прочим, равенство $0,999... = 1$ тоже абсолютно точное!)

Далее, пусть

$$y = 0,17331733173317331733...$$

Тогда

$$10000y = 1733,1733173317331733...,$$

откуда

$$\begin{aligned} 10000y &= \\ &= 1733 + 0,1733173317331733... = \\ &= 1733 + y. \end{aligned}$$

Из уравнения

$$10000y = 1733 + y$$

находим

$$9999y = 1733, \text{ т.е. } y = 1733/9999.$$

Если провести вычисления не для частных примеров, как это сделали мы, а в общем виде, то можно установить следующее правило:

Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой – период, а в знаменателе – число $10^r - 1 = \underbrace{9\dots9}_r$, где r – длина периода.

Упражнения

5. Обратите в десятичные дроби числа а) $23/99$; б) $1234/999999$.

6. Обратите в обыкновенные дроби числа а) $0,(012)$; б) $3,1(3)$; в) $1,93(173)$.

7. Сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей – периодическая дробь. Докажите это.

8. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что ее цифры можно переставить так, что получится периодическая дробь.

Предпериод

Если делить «уголком» 3 на 14, то заикливание произойдет не сразу:

$$3/14 = 0,2(142857).$$

Период, заметим, такой же, как у дроби $1/7$. Это легко объяснить:

$$\frac{3}{14} = \frac{30}{14} : 10 = \frac{15}{7} : 10 = \left(2 + \frac{1}{7}\right) : 10,$$

а делить на 10 очень легко – достаточно перенести запятую на одну позицию.

В общем случае выделим в знаменателе степени двойки и пятёрки, т.е. запишем дробь в виде $m/(2^a 5^b k)$, где a, b – неотрицательные целые числа, k – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Обозначим наибольшее из чисел a, b буквой c и выполним преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2^a 5^b k} &= \frac{m \cdot 2^c \cdot 5^c}{2^a 5^b k} : 10^c = \\ &= \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c. \end{aligned}$$

Значит, для решения вопроса о длинах периодов десятичных дробей достаточно изучить дроби со знаменателями, не кратными ни 2, ни 5 (т.е. со знаменателями, взаимно простыми с числом 10).

Упражнения

9. Зная, что $1/13 = 0,(076923)$, запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь $0,(692307)$.

10. Зная, что $7/17 = 0,(4117647058823529)$, обратите в десятичные дроби числа а) $12/85$; б) $3/68$.

11*. а) Докажите, что длина наименьшего предпериода десятичного представления правильной несократимой дроби со знаменателем $n = 2^a 5^b k$, где a, b, k – целые неотрицательные числа, причем $\text{НОД}(k, 10) = 1$, равна $c = \max(a, b)$.

б) Докажите неравенство $c \leq \log_2 n$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 2^a$ и только для них.

в) Пусть хотя бы один делитель натурального числа n отличен от 2 и 5. Докажите неравенство $c \leq \log_2(n/3)$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 3 \cdot 2^a$ и только для них.

12*. Докажите, что если в периоде десятичного представления дроби m/n , где m и n – натуральные числа, встретилась последовательность цифр 167, то $n > 100$.

⁴ Существуют и непериодические дроби, например, десятичная дробь $0,1010010001\dots$, где количество нулей между 1 единицами все время увеличивается на 1. Но в этой статье они никак не будут использованы.

Числа вида 99...9

Взглянем на равенства $1/7 = 0,(142857)$ и $1/13 = 0,(076923)$. Заметьте:

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

и

$$76923 \cdot 13 = 999999.$$

Это не случайность: как вы помните, в правиле преобразования чисто периодической дроби в обыкновенную фигурирует число $10^r - 1 = \underbrace{9...9}_r$. Поэтому

мы займемся числами этого вида.

Лемма 1. Для всякого натурального числа k , не кратного ни 2, ни 5, существует такое натуральное число r , для которого разность $10^r - 1$ кратна n .

Доказательство. Первый способ – для любителей многоточий. Рассмотрим k чисел: $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99...9}_k$.

Докажем, что хотя бы одно из них кратно k . Предположим противное: пусть ни одно из них не кратно k . Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k - 1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k . Разность этих чисел нацело делится на k и представляет из себя несколько девяток, после которых написано несколько нулей:

$$\underbrace{99...9}_{r+s} - \underbrace{99...9}_s = \underbrace{99...900...0}_{r+s}.$$

Поскольку k взаимно просто с 10, из делимости числа $\underbrace{99...900...0}_{r+s}$ на k следует, что число $\underbrace{99...9}_r$ нацело делится на k . Лемма доказана.

Второй способ – для тех, кто не любит многоточия. Рассмотрим числа $1, 10, 10^2, \dots, 10^{k-1}$. Ни одно из них не кратно k . Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k - 1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k . Разность этих чисел:

$$10^{r+s} - 10^s,$$

где $0 \leq s < r+s < k$, – нацело делится на k .

Из делимости произведения $10^s(10^r - 1)$ на k и из взаимной простоты чисел 10 и k следует, что $10^r - 1$ кратно k , т.е.

$$10^r - 1 = kt,$$

где t – натуральное число⁵. Доказательство завершено⁶.

Упражнения

13. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, ...?

14. Если число вида $11...1$ кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

15. Первую цифру k -значного числа, кратного 13, стерли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе – нет.)

16. Для каких пар натуральных чисел (m, n) , где $n > 1$, число $\underbrace{100...01}_m$ кратно числу $\underbrace{11...1}_n$?

17. а) Если p – простое число и наименьший период десятичного разложения дроби $1/p$ состоит из $2n$ цифр, то сумма двух n -значных чисел (могущих начинаться и с нуля), образованных первыми n и последними n цифрами периода, равна $10^n - 1$. Докажите это. (Например, $1/13 = 0,(076923)$, при этом $76 + 923 = 999$. Простота знаменателя существенна: $1/21 = 0,(047619)$, но $47 + 619 \neq 999$.) б) Длина наименьшего периода десятичного представления дроби $1/p$, где p – простое число, четна в точности тогда, когда p является делителем некоторого числа вида $10^n + 1$. Докажите это.

18. а) Найдите длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/31$. б) Докажите, что никакое число вида $100...01$ не кратно 31.

19 (М981). Докажите, что число $11...1$ (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 128; в*) 1024 различных делителя.

Длина периода

Теорема 2. Если m, n – взаимно простые натуральные числа, причем n взаимно просто с 10 и $m < n$, то в десятичном представлении дробь m/n является чисто периодической. Длина ее наименьшего периода – это такое наименьшее натуральное число r , что $10^r - 1$ кратно n .

Доказательство. По лемме 1, $10^r - 1 = kt$ для некоторых натуральных чисел r и t . Следова-

тельно,

$$\frac{m}{k} = \frac{mt}{kt} = mt \cdot \frac{1}{10^r - 1}.$$

Воспользовавшись равенством $1/(10^r - 1) = 0,(\underbrace{00...01}_{r-1})$, получаем

$$\frac{m}{k} = mt \cdot 0,(\underbrace{00...01}_{r-1}).$$

Поскольку $m < k$, то $mt < kt < 10^r$, так что произведение числа mt на число $0,(\underbrace{00...01}_{r-1})$ – это периодическая дробь,

длина периода которой равна r , а период – десятичная запись числа mt , возможно, дополненная слева необходимым количеством нулей.

Нам осталось только понять, почему наименьшему возможному числу r соответствует наименьший возможный период. Но это сразу ясно из правила перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2 доказана. Она вполне ясно характеризует длину r периода чисто периодической десятичной дроби. А если есть предпериод, то надо вспомнить равенство

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c,$$

и ответ станет очевиден:

Следствие теоремы 2. Длиной наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n , где $n = 2^a 5^b k$, $a, b \geq 0$ и $\text{НОД}(k, 10) = 1$, является такое наименьшее натуральное число r , что $10^r - 1$ кратно k .

Следствие следствия теоремы 2. Длина наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n зависит только от знаменателя n , а не от числителя m .

Функция $L(n)$

Обозначим через $L(n)$ длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/n$ (см. таблицу 1). В силу следствия теоремы 2, если $n = 2^a 5^b k$, где $a, b \geq 0$ и $\text{НОД}(k, 10) = 1$, то $L(n) = L(k) = r$, где r – это наименьшее натуральное число, для которого $10^r - 1$ кратно k .

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$L(n)$	1	1	1	1	1	6	1	1	1	2	1	6	6	1	1	16	

Функция L определена на всем множестве натуральных чисел⁷, но в дей-

⁵ Например, для $k = 7$ можно взять $r = 6$; при этом $t = (10^6 - 1)/7 = 142857$.

⁶ Между прочим, оно замечательно не только отсутствием многоточий, но и тем, что показывает: существует нужное нам число $r < k$, а не только $r \leq k$.

⁷ Напоминаем, что в доказательстве теоремы 1 мы договорились периодом конечной десятичной дроби считать число 1.

ствительности интерес представляют только числа, взаимно простые с числом 10.

Очевидно, если $10^r - 1$ кратно каждому из двух взаимно простых натуральных чисел m и n , то $10^r - 1$ кратно и произведению mn . Следовательно, верна следующая теорема:

Если m, n – взаимно простые натуральные числа, то $L(mn) = \text{НОК}[L(m), L(n)]$.

Упражнения

20. Найдите длину наименьшего периода дроби

а) $19/42$;

б) $2000/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 1313)$.

21. Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны а) 6 и 12; б) 12 и 20? (Пункты а) и б) составляют содержание задачи М1399.) в) Для любых двух натуральных чисел r и s через $f(r, s)$ обозначим произведение таких степеней p^a простых чисел, для которых ровно одно из чисел r, s кратно p^a и не кратно при этом степени p^{a+1} , а другое из чисел r, s не кратно числу p^a . (Например, $f(2^3 \cdot 3 \cdot 11^6, 2^4 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 23) = 2^4 \cdot 11^6 \cdot 23$.) Докажите, что числу $f(r, s)$ кратна длина t наименьшего периода суммы любых двух десятичных дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s . г) Докажите, что длина наименьшего периода суммы двух периодических дробей является делителем наименьшего общего кратного длин их периодов. д) Пусть r, s, t – натуральные числа, причем t кратно числу $f(r, s)$ и является делителем числа $\text{НОК}[r, s]$. Приведите пример двух десятичных периодических дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s , а длина наименьшего периода их суммы равна t .

Наблюдения Гаусса

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, будучи гимназистом, обращал дроби вида $1/p$, где p – простое число, отличное от 2 и 5, в бесконечные десятичные дроби: в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода такой дроби от p .

Выписывание полного периода, скажем, для $p = 47$ – утомительное занятие (46 знаков!). Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления: он выписал периоды для всех простых чисел $p < 1000$. Главная закономерность, которую он обнаружил, состоит в том, что длина $L(p)$ наименьшего периода такой дроби является

делителем числа $p - 1$, иногда совпадая с ним (см. таблицу 2). А именно, $L(p) = p - 1$ для $p = 7, 17, 23, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193$ и некоторых других чисел⁸.

Таблица 2

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
$L(p)$	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Мы докажем эту закономерность чуть ниже, а пока рассмотрим следующие разложения:

$$1/7 = 0,(142857),$$

$$2/7 = 0,(285714),$$

$$3/7 = 0,(428571),$$

$$4/7 = 0,(571428),$$

$$5/7 = 0,(714285),$$

$$6/7 = 0,(857142).$$

Периоды этих шести дробей начинаются сразу после запятой и получают друг из друга циклическим сдвигом. Это могло бы показаться случайным курьезом, будь мы любителями «занимательной» математики. Но не будем столь наивны и внимательно рассмотрим этот эффект.

Возьмем вместо 7, например, 41. Очевидно,

$$1/41 = 0,(02439).$$

«Прокрутим» период:

$$0,(24390) = 10/41,$$

$$0,(43902) = 10 \cdot 0,(24390) - 2 =$$

$$= \frac{100}{41} - 2 = 18/41,$$

$$0,(39024) = 10 \cdot 0,(43902) - 4 =$$

$$= \frac{180}{41} - 4 = 16/41,$$

$$0,(90243) = 10 \cdot 0,(39024) - 3 =$$

$$= \frac{160}{41} - 3 = 37/41.$$

Получили цикл из пяти чисел: 1, 10, 18, 16, 37. Каждое число этого

цикла – остаток от деления удесятенного предыдущего на 41.

Если бы мы начали с $2/41 = 0,(04878)$, то получили бы другой цикл: $0,(48780) = 20/41$, $0,(87804) = 36/41$, $0,(78048) = 32/41$, $0,(80487) = 33/41$.

Всего для $p = 41$ получаем 8 циклов, по 5 дробей в каждом. В общем случае,

⁸ Конечно или бесконечно множество чисел, для которых $L(p) = p - 1$, по сей день неизвестно.

если натуральное число n взаимно просто с 10 и отлично от 1, то все правильные несократимые дроби со знаменателем n разбиваются на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле. Значит, количество таких дробей кратно числу $L(n)$. (В частности, если p – простое число, то все дроби вида m/p , где $1 \leq m < p$, несократимые, откуда и следует обнаруженная юным Гауссом закономерность!)

Упражнения

22. а) Решите ребус: ПЛОМБА · 5 = = АПЛОМБ. (Здесь в записях шестизначных чисел ПЛОМБА и АПЛОМБ разные буквы обозначают разные цифры.) б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа. в) Решите ребус: НИКЕЛЬ · 6 = ЕЛЬНИК. (Указание. В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте НИК = x и ЕЛЬ = y .) г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке? д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

23. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41.

24. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

25 * (М1252). Пусть a и n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n .

Теорема Эйлера

Количество правильных несократимых дробей со знаменателем n обозначают через $\phi(n)$ (см. таблицу 3)⁹. Для любого простого числа p , очевидно, $\phi(p) = p - 1$.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16

Поскольку $\phi(n)$ правильных несократимых дробей можно разбить на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле, то верна следующая теорема:

Теорема 3. Если n – натуральное число, то $\phi(p)$ кратно числу $L(n)$.

Следствие. Если n – натуральное число, взаимно простое с числом 10, то $10^{\phi(n)} - 1$ кратно n .

⁹ Подробнее об этой функции можно прочитать в статье В. Сендерова и А. Стивяка «Малая теорема Ферма» (см. «Квант» №1 за 2000 г.).

