



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 3 - 2000 г. / Школа в «Кванте»

В. Ланге

Почему кувыркается книга? (9 кл.)

Е. Ромишевский

Еще раз о магнитной силе (10 кл.)

А. Стасенко

Пределы зоркости приборов (11 кл.)

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>
<http://vivovoco.rsl.ru>

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Почему кувырывается книга?» предназначена девятиклассникам, заметка «Еще раз о магнитной силе» – десятиклассникам и «Пределы зоркости приборов» – одиннадцатиклассникам.

Почему кувырывается книга?

А. Е. А. А.

ДЛЯ НАЧАЛА ПРЕДЛАГАЕМ ВАМ провести такой нехитрый опыт. Возьмите в руки книгу, обвязав ее шнурком, чтобы не раскрывалась при движении, или прямоугольную картонную коробку. Если вы подбросите книгу (или коробку), сообщив ей одновременно вращательное движение вокруг короткого или длинного ребра, то во время подъема и падения ось вращения будет оставаться параллельной первоначальному направлению. Однако все попытки сохранить ось вращения неизменной у книги, подброшенной с вращением вокруг среднего ребра, окажутся тщетными – в этом случае книга во время движения будет беспорядочно кувыраться.

Этот опыт всегда удается и неизменно вызывает интерес у зрителей. Можно даже поспорить со зрителями, что никому не удастся бросить книгу без кувирания, и объявить приз (который так и останется невостребованным). А вот если вас заинтересует объяснение такого поведения книги, вам придется проявить терпение и внимание, знакомясь со следующим далее текстом.

Назовем оси вращения, сохраняющие в отсутствие внешних сил свое направление в пространстве, *свободными*. Возможность их существования вытекает из несложных, но несколько громоздких рассуждений. Пусть два точечных тела с массами m_1 и m_2 находятся на концах весьма легкого (чтобы не учитывать его массу) стержня, скрепленного в точке O с осью, способной вращаться в подшипниках Π_1 и Π_2 (см. рисунок). При вращении системы с угловой скоростью ω , с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе координат, на концы стержня будут действовать *центро-*

бежные силы инерции, равные

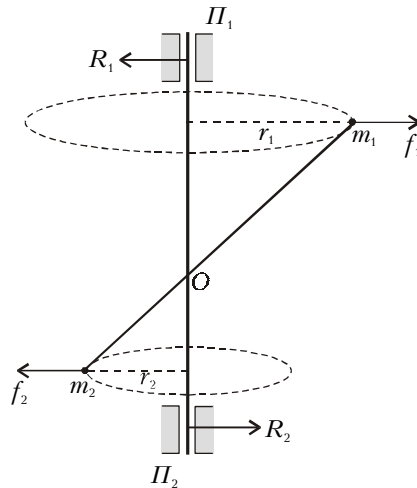
$$f_1 = m_1 \omega^2 r_1 \text{ и } f_2 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Эти силы стремятся, во-первых, повернуть ось вращения в направлении, указанном стрелками, и, во-вторых, переместить систему в сторону большей по модулю силы. Разумеется, этому препятствуют подшипники, действующие на ось с силами $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, уравновешивающими силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$.

Однако ось вращения не будет менять своего направления и без подшипников, если алгебраическая сумма моментов сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ относительно точки O окажется равной нулю и при этом будет равна нулю алгебраическая сумма самих этих сил. Первое условие реализуется, когда ось вращения перпендикулярна оси стержня, так как в этом случае плечи обеих сил относительно точки O равны нулю. Второе условие выполняется, если

$$m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2, \text{ или } m_1/m_2 = r_2/r_1.$$

Стало быть, любая ось, проходящая



через центр масс системы двух точечных тел перпендикулярно соединяющему их невесомому стержню, окажется свободной.

Рассмотрим далее систему из шести масс m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 , укрепленных на концах трех чрезвычайно легких стержней, которые пересекаются попарно под прямыми углами в такой точке O , что расстояния тел от нее удовлетворяют условиям

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad m_3 r_3 = m_4 r_4, \quad m_5 r_5 = m_6 r_6,$$

т.е. центр масс системы совпадает с точкой O . При вращении вокруг любого стержня алгебраическая сумма центробежных сил инерции и их моментов будут равны нулю, так что эти оси являются свободными. А вот любая другая ось уже не будет свободной.

Можно показать, что в каждом теле существует *только три* взаимно перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр масс тела. Их называют *главными осями инерции*. У однородного прямоугольного параллелепипеда (как наша книга или коробка) они проходят через центры противоположных граней.

Если тело приведено во вращение вокруг одной из главных осей и внешние воздействия отсутствуют, то направление оси вращения в пространстве должно оставаться неизменным. Однако закрутить тело абсолютно точно вокруг главной оси практически невозможно, к тому же неизбежные случайные толчки сразу же нарушают это движение. Поэтому длительное вращение вокруг свободной оси можно наблюдать только в том случае, когда при небольших отклонениях от этого движения появляются силы, возвращающие тело к вращению вокруг главной оси.

В отсутствие внешних сил устойчивым оказывается вращение лишь вокруг осей, которым соответствуют наибольшее или наименьшее значения момента инерции. Главная же ось, соответствующая промежуточному моменту инерции, является неустойчивой, поскольку при любом случайном отклонении от заданного вращения возникают силы, увеличивающие это отклонение. Именно это явление и наблюдается в опытах с кувиркающейся книгой.

Если вращение не абсолютно свободно (существуют силы трения или оказывает влияние сила тяжести), то устойчивой обычно оказывается одна главная ось, которой соответствует наибольший момент инерции. Это мож-

но продемонстрировать, например, с помощью палочки, подвешенной на нити к оси центробежной машины: при постепенном увеличении скорости вращения наступает момент, когда палочка поднимается, переходя из вертикального положения (которому соответствует наименьший момент инерции) практически в горизонтальную

плоскость (т.е. вращается вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции).

«Предпочтение», оказываемое вращающимся телом свободным осям с наибольшим моментом инерции, используется в технике. Чтобы нагрузки на подшипники были минимальными, нужно, как мы видели, возможно точ-

нее совместить ось вращения со свободной осью тела. Однако абсолютно точно сделать это нельзя. Поэтому в машинах с большой частотой вращения применяются гибкие, или самоцентрирующиеся, валы. В нормальном режиме они изгибаются так, чтобы вращение происходило как раз вокруг свободной оси.

Еще раз о магнитной силе

А. Д. И. Е. О. А. А. Н. Е. Е. Е.

В СТАТЬЕ «ЭТА ЗАГАДОЧНАЯ МАГНИТНАЯ СИЛА» (см. «Квант» №3 за 1999 г.) говорилось о свойствах электромагнитной силы Лоренца. Здесь же мы обсудим, как взаимодействуют между собой ее электрическая и магнитная составляющие и какова природа магнитной силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле.

Рассмотрим сначала взаимодействие магнитной и электрической сил на примере поступательного движения проводящего бруска в однородном магнитном поле (рис.1). Пусть магнитное поле $\vec{B}$ направлено перпендикулярно вектору постоянной скорости $\vec{v}$ и плоской грани ad прямоугольного бруска со сторонами a , b , d . Будем считать, что брусок имеет форму «плоского конденсатора»: сторона d много меньше сторон a и b .

Как известно, в узлах жесткой кристаллической решетки металла расположены положительные ионы, а свободные электроны равномерно рас-

пределены по его объему. При движении бруска в магнитном поле на положительные заряды бруска e^+ и отрицательные заряды e^- действуют магнитные силы, равные по величине $F_m = evB$ и направленные в противоположные стороны. Под действием магнитной силы свободные электроны смещаются вниз и создают на верхней и нижней поверхностях бруска избыточные заряды с поверхностными плотностями σ^+ и σ^- . Это приводит к тому, что внутри бруска, как в плоском конденсаторе, возникает однородное электрическое кулоновское поле $\vec{E}_\perp$, вызывающее электрическую силу, которая компенсирует действие магнитной силы в объеме бруска. Магнитная сила как бы вызывает электрическую силу, чтобы себя уравновесить:

$$F_m = F_\phi, \quad evB = eE_\perp,$$

и

$$E_\perp = vB.$$

В результате такой «плоский конденсатор» оказывается заряженным до разности потенциалов

$$\Delta\phi = E_\perp d = vBd.$$

В целом брусок остается электрически нейтральным, электрические заряды возникают только на поверхностях бруска и в равных количествах ($\sigma^+ = -\sigma^-$).

При равномерном движении бруска в однородном магнитном поле полная сила, действующая на брусок, естественно, равна нулю. Однако при ускорении бруска, т.е. при увеличении скорости $\vec{v}$, или при вхождении в

область увеличивающегося магнитного поля $\vec{B}$ брусок будет испытывать со стороны магнитного поля силу торможения. При этом будут, соответственно, увеличиваться и напряженность электрического поля $\vec{E}_\perp$, и поверхностные плотности зарядов σ^+ и σ^- .

Заметим, что равномерно движущийся в магнитном поле проводящий брусок представляет собой прообраз главного элемента самых мощных и самых распространенных источников электрической энергии, электродвижущая сила $\mathcal{E}$ которых определяется именно магнитной силой: $\mathcal{E} = vBd$.

Пусть теперь наш металлический брусок abd неподвижен и имеет омическое сопротивление R . Подключим к его граням bd (рис.2) батарею с электродвижущей силой $\mathcal{E}_0$ так, чтобы обеспечить в бруске постоянный по любому сечению bd электрический ток $I = \mathcal{E}_0/R$. Поскольку разность потенциалов между сечениями bd равна $\mathcal{E}_0$, в объеме бруска установится однородное электрическое поле $\vec{E}$, параллельное сторонам a . Под влиянием этого поля свободные электроны металла будут дрейфовать вправо со средней скоростью v_d , создавая электрический ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = nev_d bd = nev_d S,$$

где n – плотность свободных электронов, e – их заряд, а $S = bd$ – площадь сечения. Нужно отметить, что направление движения электронов со скоростью v_d противоположно направлению электрического поля $\vec{E}$ и направлению электрического тока I . Положительно заряженные ионы, образу-

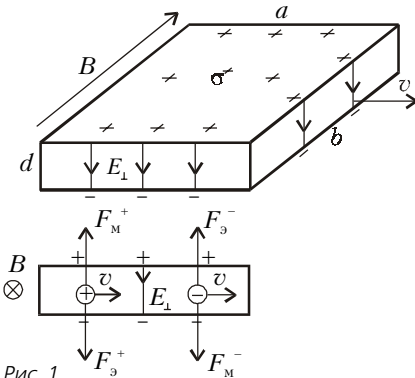


Рис. 1

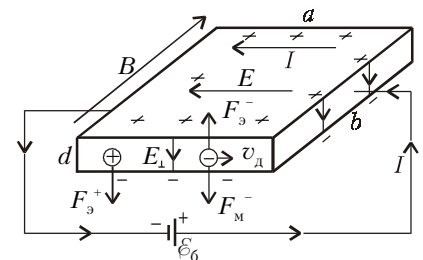


Рис. 2

щие жесткую кристаллическую решетку, естественно, при этом покоятся.

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то единственным магнитным полем будет собственное магнитное поле $\vec{B}_c$, возникающее при движении свободных электронов, которым мы можем пренебречь. Теперь включим внешнее магнитное поле $\vec{B}$, точно такое же, как и в предыдущем случае. Под действием возникшей магнитной силы, равной $F_m = ev_d B$, движущиеся со скоростью v_d электроны будут отклоняться вниз и создавать избыток отрицательных зарядов на нижней поверхности бруска и положительных на его верхней поверхности. Так будет продолжаться до тех пор, пока не возникнет поперечное электрическое поле $\vec{E}_\perp$, направленное вниз и компенсирующее действие магнитной силы, — точно так же, как это было в случае равномерного движения бруска в однородном магнитном поле. Принципиальное отличие заключается в том, что при наличии электрического тока в движении участвуют только свободные электроны. В стац-

нарном состоянии, которое достигается очень быстро после включения внешнего магнитного поля, электроны в среднем снова движутся горизонтально вдоль сторон a , а внутри металлического бруска появляется поперечное электрическое поле $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$, наблюдаемое в системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой металла. Это поле своим действием уравнивает магнитную силу, действующую на движущиеся электроны, и создает электрическую силу $\vec{F}_\perp$, направленную вниз и действующую на неподвижные положительные ионы (на кристаллическую решетку металла).

Вот таким образом магнитная сила, действующая на электроны, передается сплошному металлическому бруску. Величину этой воспринимаемой бруском силы можно записать так:

на один положительный ион действует сила, равная

$$F_\perp = eE_\perp = ev_d B,$$

на все же ионы бруска, а их $N = nabd$, где n — число ионов в единице объема (равное плотности свободных

электронов), будет действовать сила, равная

$$F_N = ev_d B \cdot nabd = nev_d bd \cdot B \cdot a = I Ba.$$

Как и следовало ожидать, эта сила в точности равна сумме всех сил Лоренца, действующих со стороны магнитного поля на движущиеся электроны. Силу, действующую на проводник длиной a , по которому течет ток I и который помещен в однородное магнитное поле B , называют силой Ампера. А физическое явление возникновения разности потенциалов между поверхностями проводника (нашего бруска), когда по нему течет электрический ток и проводник находится в магнитном поле, называется *эффектом Холла*. Эту разность потенциалов

$$\Delta\varphi = E_\perp d = v_d B d = \frac{1}{neS} IBd$$

можно измерить непосредственно с помощью вольтметра. Заметим, что эффект Холла был открыт в 1879 году, за много лет до открытия электрона Томсоном (1897 г.).

Пределы зоркости приборов

À.ÑÒÀÑÃÍÊÎ

«МИСТЕР ЛУНД ПОДОШЕЛ К ТЕЛЕСКОПУ и начал смотреть на луну...

— А не видите ли вы бледных пятен, движущихся возле луны?..

— Черт возьми, сэр! Называйте меня ослом, если я не вижу этих пятен! Что это за пятна?

— Это пятна, которые видны в один только мой телескоп. Довольно! Оставьте телескоп!

...Через полчаса мистер Вильям Болваниус, Джон Лунд и шотландец Том Бекас летели уже к таинственным пятнам на восемнадцати аэростатах.

...Кто из читателей восплает желанием ближе познакомиться с мистером Вильямом Болваниусом, тот пусть прочтет его замечательное сочинение «Существовала ли луна до потопа? Если существовала, то почему же и

она не утонула?»... Между прочим, там описывается, как он прожил два года в австралийских камышах, где питался раками, тинной, яйцами крокодилов и ... изобрел микроскоп, совер-

шенно сходный с нашим обыкновенным микроскопом...» (А.Чехов. «Летающие острова»).

Действительно, среди многочисленных приборов, изобретенных физиками, широкую известность получили телескоп и микроскоп. Один из них устремлен в глубины Вселенной, другой позволяет рассматривать всякую мелочь буквально «под носом». Обсудим вкратце, как они работают.

С точки зрения геометрической оптики, с *телескопом* все просто. Есть две соосные линзы с фокусными расстояниями $F_{об}$ у объектива и $F_{ок}$ у окуляра (рис.1). Лучи, идущие от каждой из двух рассматриваемых звезд —

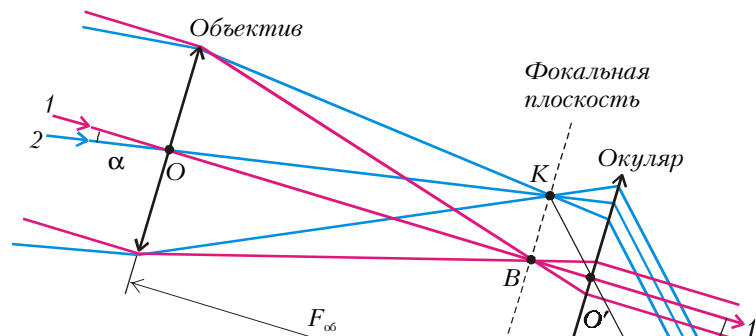


Рис. 1

направления 1 и 2, — почти параллельны и, по определению фокусного расстояния, после объектива они должны собраться в двух точках B и K , лежащих в фокальной плоскости объектива. Но в телескопической системе это одновременно и фокальная плоскость окуляра, поэтому, пройдя через окуляр, лучи должны выйти тоже двумя параллельными пучками с осями $1'$ и $2'$. Угол между входящими лучами 1 и 2 (направлениями на две звезды) обозначим через α , а угол между выходящими лучами — через β . Легко видеть, в чем «фокус» такой телескопической системы. Из прямоугольных треугольников OBK и $O'BK$ видно, что их общий катет равен

$$BK = F_{\text{об}} \operatorname{tg} \alpha = F_{\text{ок}} \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}} \approx \frac{\beta}{\alpha} \quad (1)$$

(последнее приближенное равенство записано для случая малых углов, который обычно и реализуется на практике).

Полученное соотношение открывает, казалось бы, неограниченные возможности для увеличения телескопа: нужно брать как можно более длиннофокусный объектив (вот почему оптические телескопы-рефракторы такие длинные) и как можно более короткофокусный окуляр. Но тут вмешивается еще один характерный размер — длина волны λ . Как же иначе? Ведь свет — это электромагнитные волны в диапазоне $0,4 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,8 \text{ мкм}$. А любая волна, проходя около препятствия, дифрагирует. Более того, любой участок *первичной волны* (например, в плоскости объектива), согласно принципу Гюйгенса—Френеля, можно считать источником *вторичных* волн, которые затем интерферируют друг с другом всюду, где встретятся, например — в фокальной плоскости объектива.

Проведем при помощи этого принципа приближенное рассмотрение дифракции света (от одной звезды) на объективе телескопа. Разобьем объектив условно на две половины (рис. 2, а) и будем считать, что обе они являются источниками вторичных волн. Если принять расстояние между точками C и C' равным половине диаметра D объектива, то разность хода волн, пришедших от них в точку M , будет приблизительно равна (см. выделенный треугольник на рисунке 2, б)

$$\Delta = \frac{D}{2} \sin \theta.$$

И результат их интерференции будет определяться значением этой разности. Например, в точке B (да и на всей оптической оси OB) имеем $\theta = 0$ и $\Delta = 0$; значит, эти две волны будут усиливать друг друга, так что в фокусе объектива (если туда поставить пластинку, перпендикулярную оптической оси) будет светлое пятно.

Можно уточнить этот результат, считая, что точки C и C' соответствуют центрам тяжести каждой из половин объектива. Нетрудно показать (например, сделав полукруг из картона и уравновесив его на лезвии ножа) или посмотреть в справочнике, что центр масс полукруга находится на высоте $y_C = \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2}$ над его диаметром. Значит, разность хода Δ двух сферических волн, исходящих из точек C и C' под углом θ к оптической оси, будет равна

$$\Delta = 2y_C \sin \theta = \frac{8}{3\pi} \frac{D}{2} \sin \theta. \quad (2)$$

Будем теперь перемещать вверх (или вниз) точку наблюдения в фокальной плоскости. Тогда угол θ будет расти, а вместе с ним будет расти разность хода Δ . Очень важно найти, при каком значении угла $\theta_{1\min}$ эта разность хода станет равной $\Delta_{1\min} = \frac{\lambda}{2}$, так что

волны погасят друг друга. Из выражения (2) имеем

$$\sin \theta_{1\min} = \frac{3\pi}{8} \frac{\lambda}{D} = 1,18 \frac{\lambda}{D} \approx \theta_{1\min}.$$

Конечно, принцип Гюйгенса—Френеля предписывает складывать элементарные возмущения от малых площадок первичной волны (т.е. интегрировать). При этом нам пришлось бы иметь дело с так называемыми функциями Бесселя, которые в случае осевой симметрии являются аналогами «обычных» синусов и косинусов, характерных для одномерных задач (например, струны гитары). И тогда получился бы более точный результат:

$$\sin \theta_{1\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3)$$

Видно, что наше грубое рассмотрение всего лишь на четыре процента отличается от более точного — не так уж и плохо. Но почему для нас так важен этот угол? Потому что он дает радиус первого темного кольца $BM = F_{\text{об}} \cdot \theta_{1\min}$, окружающего светлое пятнышко — изображение звезды в фокальной плоскости объектива. Получается, что это вовсе не точка, как утверждает геометрическая оптика. Значит, вторая звезда с угловым расстоянием α от оптической оси тоже даст светлое пятнышко в фокальной плоскости, и теперь все дело в том, насколько далеко оно окажется от изображения первой звезды. Великий Рэлей предложил простой критерий: должно быть

$$\alpha \gtrsim \theta_{1\min}, \quad (4)$$

иначе изображения двух звезд наложатся друг на друга уже в фокальной плоскости объектива и далее никакими ухищрениями их не разделить.

Но оторвемся от звезд и заглянем в *микроскоп*. Обычное построение изображений предмета в объективе и окуляре (в приближении тонких линз) дано на рисунке 3. Тут существенно,

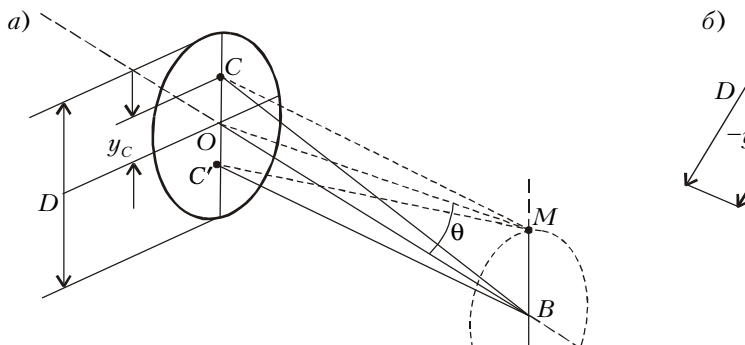


Рис. 2

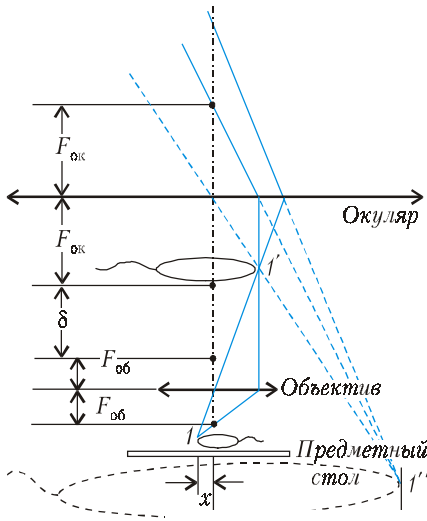


Рис. 3

чтобы предмет находился за фокусом объектива – тогда изображение i' будет действительным, а это изображение чтобы находилось между окуляром и его фокусом – тогда окончательное изображение i'' будет мнимым.

Геометрическая оптика дает для увеличения микроскопа следующее выражение (см. рис.3):

$$\frac{X}{x} = \frac{D_0 \delta}{F_{ок} F_{об}},$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра, D_0 – так называемое расстояние наилучшего зрения. Увеличение микроскопа может быть значительным. Например, для характерных значений $F_{об} = 2$ мм, $F_{ок} = 15$ мм, $\delta = 160$ мм и $D_0 = 250$ мм получим $X/x = 1335$.

Казалось бы, это не предел – надо лишь делать линзы все более совершенными геометрически (шлифовать), устранять их недостатки (апланатизм, астигматизм, хроматическую и сферическую абберации, дисторсию...) и все

будет в порядке. Но и тут вмешалась все та же λ !

Теорию разрешающей способности микроскопа разработал Аббе (о нем совсем недавно рассказывалось в «Кванте» – см. №1 за 2000 г.). Он предложил рассмотреть в микроскоп дифракционную решетку (рис.4). Какую минимальную информацию можно получить об этой решетке? Конечно, прежде всего можно узнать ее период d .

Как известно, при прохождении через решетку света с длиной волны λ должен получиться набор дифракционных максимумов. Если свет падает на решетку под углом θ_0 , то направление на эти максимумы определяется условием

$$\Delta_m - \Delta_0 = d \sin \theta_{m \max} - d \sin \theta_0 = m\lambda. \quad (5)$$

Чтобы микроскоп дал информацию о периоде d , в его объектив должны прийти по крайней мере два луча, соответствующих двум соседним максимумам дифракционной картины, например $m = 0$ и $m = -1$. Именно такой предельный случай $\alpha = \theta_0$ и $-\alpha = \theta_{-1 \max}$ изображен на рисунке 4. Заметим, что период решетки d , который мы стремимся рассмотреть, конечно, очень мал – порядка микрометров. В этом масштабе объектив микроскопа и его фокусное расстояние (порядка миллиметров) таковы, что сам объектив нужно было бы изобразить далеко за пределами рисунка (порядка метров); поэтому он показан штриховой линией лишь условно (а идущие к нему от узлов решетки лучи почти параллельны).

Итак, из условия (5) получим $2d \sin \alpha = \lambda$ (α называется апертурным углом). Значит, при заданной длине волны подсветки наименьший период решетки, который можно «рассмотреть» в микроскоп, равен $d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$.

Можно еще облегчить дело: если между решеткой и объективом поместить среду с коэффициентом преломления n (например, капнуть какую-либо жидкость), то увеличится *оптическая разность хода* (ведь в этой среде скорость света и длина волны станут в n раз меньше). В результате получим

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}. \quad (6)$$

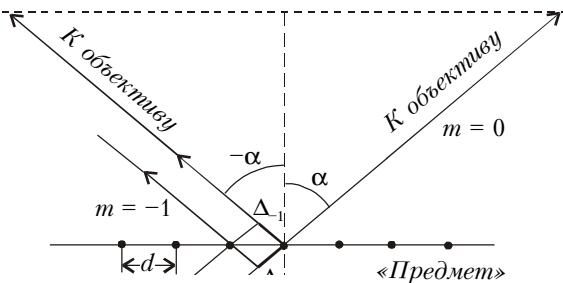


Рис. 4

Теперь сравним разрешающие способности телескопа и микроскопа. Получается, что мы выдвигаем прямо противоположные требования:

для телескопа $\frac{\lambda}{D} \approx \alpha_{\min}$ желательно делать как можно меньше;

для микроскопа $\frac{\lambda}{d} \approx 2n \sin \alpha$ желательно делать как можно больше.

Отсюда понятно стремление строить телескопы с возможно большим диаметром входного «зрачка», а микроскопы – с возможно меньшим фокусным расстоянием объектива (чтобы $\sin \alpha$ был как можно ближе к единице) и при этом пространство между объективом и предметом наблюдения следует заполнить жидкостью с возможно большим показателем преломления n (так называемая *иммерсионная техника*).

Что же достигнуто человечеством?

Самый большой диаметр объектива оптического телескопа $D \sim 6$ м. Для «средней» длины волны света $\lambda \sim 0,6$ мкм из выражений (3) и (4) будем иметь $\alpha_{\min} \sim 10^{-7}$. Принимая радиус Вселенной $R \sim 10^{26}$ м, для двух разрешимых точек на ее «границе» получим

$$l_{\min} \sim R \alpha_{\min} \sim 10^{19} \text{ м.}$$

В случае микроскопа положим $\sin \alpha \leq 1$, $n \approx 1,6$ (коэффициент преломления анилина). Тогда из равенства (6) найдем

$$d_{\min} \gtrsim \frac{\lambda}{4} \sim 0,1 \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ м.}$$

Таковы характерные пределы возможностей этих замечательных оптических приборов.