



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

тел. : [095] 930-56-48

e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 4 - 2000 г. / Практикум абитуриента

Ю. Чешев

Конденсатор в электростатическом поле

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://vivovoco.nns.ru>

<http://vivovoco.rsl.ru>

<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

Конденсаторы в электростатическом поле

Р. × А Ø А Â

В ПРИРОДЕ СУЩЕСТВУЮТ ДВА РОДА электрических зарядов: положительные и отрицательные. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Сила взаимодействия точечных зарядов определяется законом Кулона.

Пространство вокруг заряда заполнено физической материей, посредством которой и осуществляется взаимодействие между зарядами. Это — электрическое поле. Его основным свойством является наличие силы, действующей на заряд, помещенный в это поле. Отношение силы, с которой поле действует на точечный заряд, к величине этого заряда называют напряженностью поля. Электрическое поле наглядно изображается с помощью силовых линий, или линий напряженности. Напомним, что силовой линией называют линию, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с вектором напряженности поля.

При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Отношение работы поля по перемещению заряда из одной точки в другую к величине этого заряда называют разностью потенциалов.

Электростатическое поле создается только неподвижными зарядами. При решении задач по электростатике часто используются принцип суперпозиции полей и закон сохранения электрического заряда.

Задача 1. Однородное электрическое поле слева от бесконечной заряженной плоской пластины равно $\vec{E}_1$, а справа $\vec{E}_2$ (рис.1). Определите силу, действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.

Такая ситуация возможна, если пластину, заряженную некоторым зарядом q , поместить во внешнее однородное поле $\vec{E}_0$, силовые линии которого

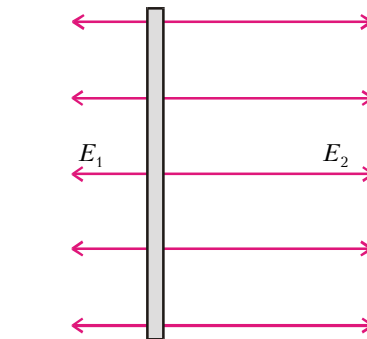


Рис. 1

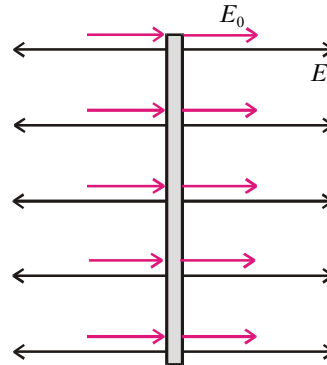


Рис. 2

перпендикулярны плоскости пластины и направлены слева направо (рис.2). Пусть $\vec{E}$ — напряженность электрического поля пластины площадью S , тогда

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, напряженность поля слева от пластины равна

$$E_1 = E - E_0,$$

а справа —

$$E_2 = E + E_0.$$

Отсюда находим E и E_0 :

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad E_0 = \frac{E_2 - E_1}{2}.$$

Теперь определим заряд пластины:

$$q = E \cdot 2\epsilon_0 S = (E_1 + E_2)\epsilon_0 S$$

и силу, действующую на единичную площадь пластины со стороны внешнего поля $\vec{E}_0$:

$$f = \frac{q}{S} E_0 = \epsilon_0 \frac{E_2^2 - E_1^2}{2}.$$

Задача 2. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 находится во внешнем однородном электрическом поле $\vec{E}_0$ (рис.3). Силовые линии

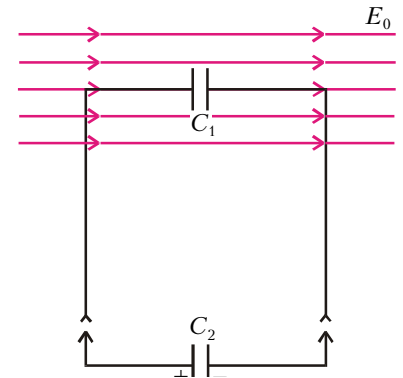


Рис. 3

электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора, расстояние между пластинами d . Конденсатор емкостью C_2 , заряженный до разности потенциалов U_0 , подключается к конденсатору емкостью C_1 . Определите заряды конденсаторов после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора емкостью C_2 можно пренебречь.

После соединения конденсаторов начальный заряд второго конденсатора $q_0 = C_2 U_0$ перераспределится между обоими конденсаторами так, что разности потенциалов на них уравниются. Обозначим установившиеся заряды через q_1 и q_2 . По закону сохранения заряда,

$$q_1 + q_2 = C_2 U_0. \quad 1)$$

Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что разность потенциалов между пластинами первого конденсатора будет равна

$$\Delta\varphi_1 = E_0 d + \frac{q_1}{C_1}.$$

Между пластинами второго конденсатора установится разность потенциалов

$$\Delta\varphi_2 = \frac{q_2}{C_2}.$$

Приравняв $\Delta\Phi_1$ к $\Delta\Phi_2$, получаем

$$E_0 d + \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить заряды q_1 и q_2 :

$$q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (U_0 + E_0 d),$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(U_0 \frac{C_2}{C_1} - E_0 d \right).$$

Задача 3. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис.4). На пластине 1 на-

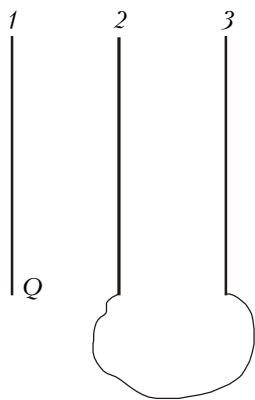


Рис. 4

ходится заряд Q , а незаряженные пластины 2 и 3 закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину 2. Площадь каждой пластины S .

Напряженность электрического поля пластины 1 равна

$$E_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}.$$

Так как пластины 2 и 3 закорочены проводником, разность потенциалов между ними равна нулю. Следовательно, на них должны появиться заряды, электрические поля которых вместе с электрическим полем заряда Q обеспечивают эту нулевую разность потенциалов. Обозначим заряды пластин через q_2 и q_3 (рис.5). Из закона

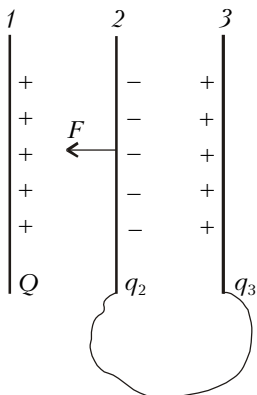


Рис. 5

сохранения заряда следует, что эти заряды равны по величине и противоположны по знаку:

$$q_2 = -q_3.$$

Из принципа суперпозиции электрических полей получаем

$$U_{23} = (E_1 - E_2 - E_3)d = 0,$$

где U_{23} – разность потенциалов между пластинами 2 и 3, E_1 , E_2 и E_3 – величины напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, d – расстояние между пластинами 2 и 3. Принимая во внимание, что $E_2 = E_3$, находим

$$E_2 = E_3 = \frac{E_1}{2}.$$

Теперь легко определить заряды пластин:

$$q_2 = -q_3 = -\frac{Q}{2}.$$

Очевидно, что пластина 2 с зарядом $q_2 = -Q/2$ находится в поле пластин 1 и 3. Следовательно сила, действующая на нее, равна

$$F = q_2(E_3 - E_1) = \frac{QE_1}{4} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}.$$

Задача 4. Обкладки плоского конденсатора емкостью C соединены накоротко (рис.6). Вблизи правой

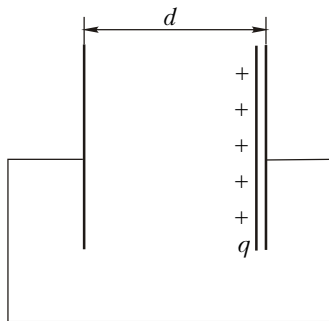


Рис. 6

обкладки находится плоская пластина с зарядом q , площадь которой равна площади обкладок конденсатора. Какую работу нужно совершить, чтобы отодвинуть пластину от правой обкладки на $d/2$, где d – расстояние между обкладками?

Пусть в некоторый момент времени пластина с зарядом q находится на расстоянии x от правой обкладки конденсатора (рис.7). Напряженность электрического поля, создаваемая этой пластиной, равна

$$E_0 = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

На обкладках конденсатора индуцируются заряды, равные по величине и

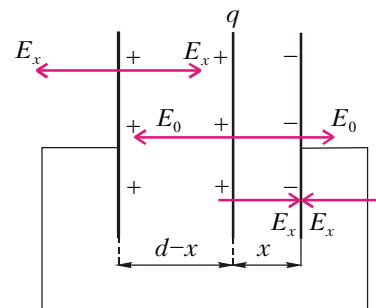


Рис. 7

противоположные по знаку – пусть заряд левой пластины положительный, а правой отрицательный. Совместно с зарядом q эти заряды обеспечивают нулевую разность потенциалов между обкладками конденсатора. Обозначим напряженности полей, соответствующие этим зарядам, через E_x . Работа электрического поля по перенесению положительного единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Следовательно,

$$(E_0 + 2E_x)x + (2E_x - E_0)(d - x) = 0,$$

откуда находим напряженность электрического поля, в котором перемещается пластина:

$$2E_x = E_0 \left(1 - \frac{2x}{d} \right).$$

Сила, действующая на пластину со стороны этого поля, есть линейная

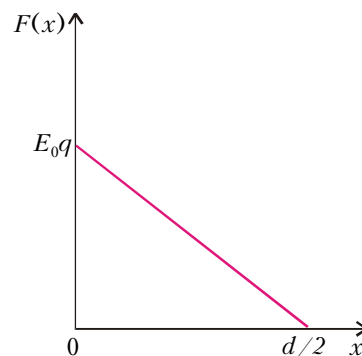


Рис. 8

функция ее перемещения x (рис.8):

$$F(x) = 2E_x q = E_0 q \left(1 - \frac{2x}{d} \right).$$

Теперь очевидно, что искомая работа равна

$$A = \frac{E_0 q}{2} \frac{d}{2} = \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{8C}.$$

Задача 5. Две соединенные проводником пластины незаряженного конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем одно-

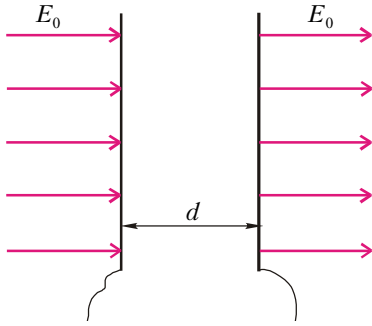


Рис. 9

родном электрическом поле, напряженность которого равна E_0 (рис. 9). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

Так как пластины конденсатора замкнуты проводником, напряженность электрического поля между ними равна нулю. Пусть начальная энергия электрического поля вне конденсатора равна W_0 . После того как пластины сблизилась на расстояние $d/2$, в объеме $V = Sd/2$ появилось поле, энергия которого равна

$$W_1 = w \frac{Sd}{2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{Sd}{2},$$

где $w = \epsilon_0 E_0^2 / 2$ — плотность энергии электрического поля. Тогда изменение энергии поля во всем пространстве равно

$$\Delta W = (W_1 + W_0) - W_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Это увеличение энергии произошло за счет совершенной работы; таким образом, работа, которую нужно совершить, равна

$$A = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Задача 6. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной a и массой m (рис. 10). В

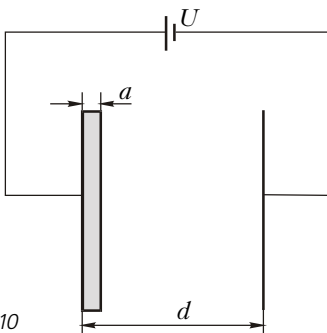


Рис. 10

начальный момент пластина прижата к левой обкладке конденсатора, а затем она отпускается. Чему будет равна скорость пластины в тот момент, когда она достигнет правой обкладки конденсатора? Площадь каждой пластины S , расстояние между обкладками d .

Так как разность потенциалов U на конденсаторе задана, заряд пластины в начальный момент времени равен

$$q = U \frac{\epsilon_0 S}{d - a}$$

и во время движения пластины между обкладками конденсатора будет сохраняться. В начальный момент левая обкладка конденсатора не заряжена, при этом правая обкладка конденсатора заряжена зарядом $-q$. По мере продвижения пластины заряды на обкладках будут изменяться, обеспечивая постоянство разности потенциалов между ними. Батарея зарядов не создает, следовательно, суммарный заряд обкладок конденсатора сохраняется. Найдём заряды обкладок в тот момент, когда пластина приблизится к правой обкладке. Пусть эти заряды равны Q_1 и Q_2 . Тогда, по закону сохранения заряда,

$$Q_1 + Q_2 = -q.$$

Если в некоторый момент времени пластина находится на расстоянии x от левой обкладки (рис. 11), то из

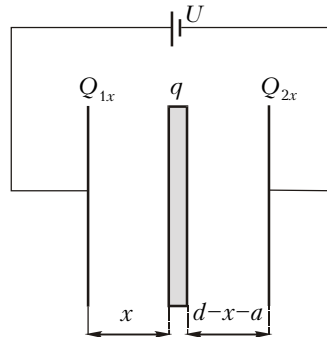


Рис. 11

постоянства разности потенциалов между обкладками получаем

$$\left(\frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} \right) x + \left(\frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} \right) (d - x - a) = U,$$

где Q_{1x} — заряд на левой обкладке конденсатора, а Q_{2x} — на правой.

Устремляя x к $(d - a)$ и учитывая связь между величинами зарядов, на-

ходим

$$Q_2 = -2q.$$

Таким образом, при достижении пластиной правой обкладки ее заряд будет $-2q$, а левой $+q$. Работа батареи $A = Uq$ идет на изменение кинетической энергии пластины. Следовательно,

$$Uq = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость пластины равна

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 S U^2}{m(d - a)}}.$$

Задача 7. Две тонкостенные металлические сферы, радиусы которых $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см, образуют сферический конденсатор (рис. 12).

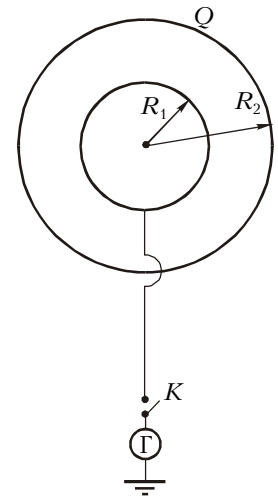


Рис. 12

На внешней сфере находится заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр G , если замкнуть ключ K ?

Потенциал внешней сферы равен

$$\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Так как внутренняя сфера не заряжена, во всем внутреннем пространстве внешней сферы потенциал остается постоянным и равным ϕ_2 . После того как внутреннюю сферу заземлили, ее потенциал стал равен нулю. Чтобы обеспечить нулевой потенциал внутренней сферы, требуется поместить на нее соответствующий заряд q . Согласно принципу суперпозиции,

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0,$$

откуда получаем

$$q = -Q \frac{R_1}{R_2} = -5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Именно этот заряд и протечет через гальванометр.

Задача 8. В системе, изображенной на рисунке 13, радиус внутренней

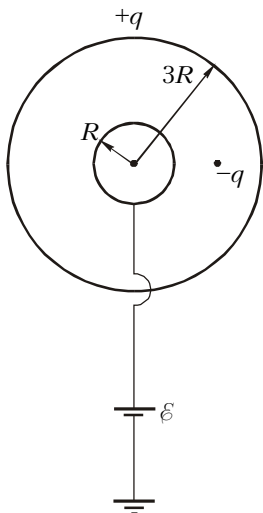


Рис. 13

проводящей сферы R , внешней (тоже проводящей) $3R$, заряд внешней сферы $+q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q , ε , R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на расстоянии $2R$ от проводящей сферы радиусом R расположен точечный заряд $-q$. Определим потенциал сферы. Заряд $-q$ приведет к перераспределению зарядов на сфере (к ее поляризации). Обозначим через

σ поверхностную плотность заряда на сфере. По закону сохранения заряда,

$$\sum_i \sigma_i \Delta S_i = 0,$$

где ΔS_i — площадь i -го участка сферы, а σ_i — плотность заряда i -го участка. Тогда из принципа суперпозиции находим потенциал в центре сферы:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} + \sum_i \frac{\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = \\ &= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

При этом напряженность электрического поля внутри проводящей сферы равна нулю. Следовательно, потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу на ее поверхности, т.е.

$$\varphi_R = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Теперь решение поставленной задачи очевидно. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\varepsilon = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3R} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R \varepsilon + \frac{1}{6} q.$$

Упражнения

1. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС ε , параллельно обкладкам помещена плоская пластина, имеющая заряд q . Расстояния от пластины до обкладок d_1 и d_2 . Площадь пластины и обкладок S .

Определите силу, действующую на пластину со стороны электрического поля.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор. На средней пластине имеется заряд $+Q$, крайние незаряженные пластины закорочены проводником. Определите величину и направление напряженностей электрического поля между пластинами, если расстояния между пластинами l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), а площадь каждой пластины S .

3. Две соединенные проводником пластины плоского конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга во внешнем однородном электрическом поле. Расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин. Определите напряженность внешнего электрического поля, если известно, что при медленном сближении пластин до расстояния $d/3$ была совершена работа A .

4. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной l и массой m . Пластина в начальный момент прижата к левой обкладке конденсатора, а затем отпускается. Чему будет равно ускорение пластины в тот момент, когда она будет занимать симметричное положение относительно обкладок конденсатора? Площадь каждой пластины S , а расстояние между обкладками d .

5. В системе, похожей на изображенную на рисунке 13, радиус внутренней проводящей сферы R , внешней (тоже проводящей) $2R$. На расстоянии $3R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q , ε и R , определите заряд на внешней сфере. Потенциал земли принять равным нулю.