



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 5 - 2000 г. / Олимпиады

XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://vivovoco.nns.ru>
<http://vivovoco.rsl.ru>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап олимпиады состоялся с 12 по 18 апреля 2000 года в Казани. Ему предшествовали зональные соревнования в Барнауле, Кирове, Краснодаре, Нижнем Новгороде, а также городские олимпиады Москвы и Санкт-Петербурга. Их победители (180 школьников из 47 регионов России, а также наиболее успешно выступившей на национальной олимпиаде Китая провинции Квантун) провели в столице Республики Татарстан семь запоминающихся дней.

Список призеров олимпиады свидетельствует о более заметных, чем, скажем, 5–7 лет назад, успехах юных математиков из областных центров и небольших городов. Особо отметим Белорецкую компьютерную школу, Гуманитарно-естественный лицей 41 Ижевска и ФМЛ Кирова; именно эти учебные заведения наряду с Московской государственной Пятидесят седьмой школой и ФМЛ 239 Петербурга были представлены своими учащимися во всех параллелях. Любопытны цифры по Краснодару: 13 участников из 10 разных школ.

Замечательно выступили на олимпиаде ростовчанин *Олег Гольберг* (9 класс), мурманчанин *Сергей Волков* (10 класс), петербуржец *Юрий Лифшиц* (11 класс) и кировчанин *Андрей Халявин* (ученик 9 класса, выступавший за 11 класс). Эти ребята решили все задачи.

А команду России для участия в XLI Международной математической олимпиаде составили *В.Дремов, Ю.Лифшиц, А.Поярков, А.Гайфуллин, А.Федотов и А.Халявин*; запасным участником был определен *Е.Зинин*.

В заключение следует поблагодарить оргкомитет, работу которого возглавлял заместитель министра образования Татарстана *И.Г.Хадиуллин*. Основные события олимпиады происходили в школе 1, а из «нематематической» программы наиболее интересными были экскурсии в музей Н.И.Лобачевского и в казанский Кремль.

Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Зональный этап

8 класс

1. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

Н.Агаханов

2. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они разных цветов.

С.Дужин

3. Какое наименьшее число сторон может иметь нечетноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы?

Л.Емельянов

4. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алма-

за, действуя по следующим правилам.

Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем так же поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению), и т.д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его?

Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

Д.Храмцов

5. Даны 8 гирек массой 1, 2, ..., 8 граммов, но неизвестно, какая из них какой массы. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит массу каждой гирьки, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлена масса хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

А.Шаповалов

6. Пусть от платформы A до платформы B электропоезд прошел за X минут ($0 < X < 60$). Найдите X , если известно, что как в момент отправления от A , так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам.

С.Токарев

7. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая, симметричная AB относительно CE , пересекает прямую, симметричную BC относительно AD , в точке K . Докажите, что $KO \perp AC$.

М.Сонкин

8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т.е. 1, 2, 4, 8, ...). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

И.Рубанов

9 класс

1. Миша решил уравнение $x^2 + ax + b = 0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел – два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие – коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

М.Евдокимов

2. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a , b и c , большие 1 и такие, что $2^a + 1$ делится на b , $2^b + 1$ делится на c , а $2^c + 1$ делится на a ?

В.Сендеров

3. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

С.Берлов

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N . Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN , пересекающие S_2 в точках B и C , а через точку D окружности S_2 — прямые DM и DN , пересекающие S_1 в

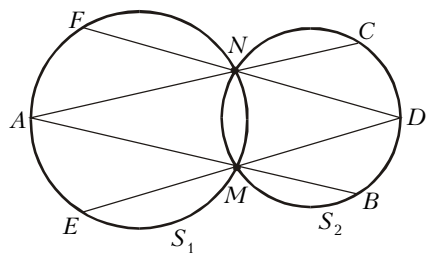


Рис. 1

точках E и F , причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN , а D, B, C — по другую (рис. 1). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D .

М. Сонкин, Д. Терешин

5. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рисунке 2. Докажите, что

1^3	2^3	3^3	$\dots$
2^3	3^3	$\ddots$	
3^3			
$\vdots$			

Рис. 2

сумма всех чисел в таблице делится на 200.

Л. Емельянов

6. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина — алюминиевые массой 10 г, а остальные — дюралевые массой 9,9 г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них — одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

С. Токарев

7. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника BCD , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ACD , пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN . Докажите, что

прямая OD перпендикулярна стороне AB .

М. Сонкин

8. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , в котором число белых клеток нечетно.

Р. Садыков, Е. Черепанов

10 класс

1. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

В. Произволов, В. Сендеров

2. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

Л. Емельянов

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD . Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K . Найдите отношение AO/OK .

С. Берлов

4. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

В. Замятин

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbf{R}$ и для всех $x, y \in \mathbf{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2?$$

Е. Знак

6. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при всех нечетных $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

А. Храбров

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N . Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB , из L на BC , из M на CD , пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

П. Кожевников

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины (т.е. состоящих из нечетного числа дорог). Докажите, что страну можно разделить на $2N+2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

В. Дольников, Д. Карпов

11 класс

1. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, что уравнение

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} - a_1 \sqrt{x} - a_2 \sqrt{x} - \dots - a_{10} \sqrt{x} \\ &= \sqrt{x} + a_1 \sqrt{x} + a_2 \sqrt{x} + \dots + a_{10} \sqrt{x} \end{aligned}$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

Н. Агаханов

2. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

И. Рубанов

3. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ действительных чисел такова, что для любого натурального $n, 1 \leq n \leq 2000$, выполняется равенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

С. Тухвебер

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Для неотрицательных чисел x и y , не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

А. Храбров

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC , имеет центр O и касается стороны AC в точке K . Вторая окружность — также с центром O — пересекает все стороны треугольника ABC . Пусть E и F — ее точки пересечения со сторонами AB и BC соответственно, ближайšie к вершине B ; B_1 и B_2 — точки ее пересечения со стороной AC , B_1 — ближе к A . Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

М. Сонкин

7. Даны числа $1, 2, \dots, N$, каждое из которых окрашено либо в черный,

либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми?

С.Токарев

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

1. Различные числа a , b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

Н.Агаханов

2. Таня задумала натуральное число $X \leq 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N , меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N ?». Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов.

А.Голованов

3. Пусть O – центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A , O , C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN . Докажите, что $BL \perp AC$.

М.Сонкин

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого (т.е. количество входящих в него дорог) не делится на 3.

Д.Карпов

5. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1$, a_2 , a_3 , ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появляются в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

Н.Агаханов

6. См. задачу M1745 «Задачника «Кванта».

7. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E . Окружность S_1 , проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A , пересекает сторону AC в точке M . Окружность S_2 ,

проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B , пересекает сторону BC в точке N . Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2 .

М.Сонкин

8. По окружности расставлены 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

С.Берлов

10 класс

1. См. задачу M1743 «Задачника «Кванта».

2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ и $x_1^{13} + x_2^{13} + \dots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Докажите, что если $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, то

$$x_1^{13} y_1 + x_2^{13} y_2 + \dots + x_n^{13} y_n < x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

О.Мусин

3. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны AC , в точке R . Докажите, что точки P , B , Q и R лежат на одной окружности.

С.Берлов

4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A , B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x); при этом дается ответ «Да» или «Нет». Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут массы гирь?

О.Подлипский

5. Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M . Какое наибольшее число элементов может быть в M ?

Е.Черепанов

6. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

А.Храбров

7. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N . Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC , не содержащих точку N . Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM , пересекаются второй раз в точке B_1 . Докажите, что BPB_1Q – параллелограмм.

Т.Емельянова

8. См. задачу M1744 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Найдите все функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbf{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z).$$

Н.Агаханов, О.Подлипский

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c такой, что $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

Д.Джукин, Ф.Петров, И.Богданов, С.Берлов

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пяти-

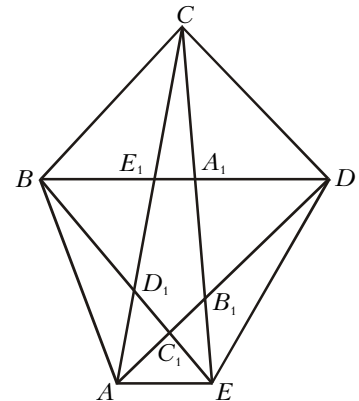


Рис. 3

угольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис.3) есть хотя бы одна целая точка.

В.Дольников, И.Богданов

4. Дана последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\dots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \dots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число

тех k , для которых $m_k > \alpha$, меньше чем $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\alpha}$.

В.Дольников

5. Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1.$$

А.Храбров

6. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется совершенным, если оно рав-

но сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

А.Храбров

7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O . Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD , окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD . Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и

центр окружности ω лежат на одной прямой.

П.Кожевников

8. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в любой строке и в любом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, на пересечении которых все четыре клетки окрашены в разные цвета.

С.Берлов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, школа 527, 7 кл.,
Стырт Олег – Омск, лицей 64;

по 10 классам –

Волков Сергей – Мурманск, Политехнический лицей;

по 11 классам –

Гайфуллин Александр – Раменское, муниципальная гимназия,
Лифшиц Юрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ, 9 кл.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Держак Мария – Калуга, школа 4,
Кобзев Владимир – Белорецк, Компьютерная школа,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8, 8 кл.,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Митричев Петр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Порсев Анатолий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,
Сороцкий Евгений – Санкт-Петербург, гимназия 70;

по 10 классам –

Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Бурков Евгений – Нижний Новгород, гимназия 63,
Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,

Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11,

Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,

Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,

Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Сонкина Анна – Калуга, школа 24,

Спиридонов Сергей – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41;

по 11 классам –

Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24,

Зинин Евгений – Краснодар, гимназия 87,

Исмаилов Ильнур – Саров, лицей 3,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия,

Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,

Поярков Алексей – Рыбинск, лицей 2,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Фролов Сергей – Нижний Новгород, гимназия 87.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Белокопытов Артем – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,

Ватев Кирилл – Долгопрудный, ФМШ 5,
Волков Юрий – Кемерово, Классический лицей, 8 кл.,

Красильников Павел – Краснодар, школа 2, 8 кл.,

Марков Виктор – Покровск, Покровская школа,

Седов Игорь – Казань, лицей 5,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Телятник Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,

Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,

Юдкин Дмитрий – Краснодар, школа 63;

по 10 классам –

Васильев Антон – Санкт-Петербург, гимназия 30,

Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33,

Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Жук Дмитрий – Вологда, ВГЕМЛ,

Игнатенков Егор – Омск, лицей 168,

Клименко Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Латишин Виктор – Москва, школа 1303,

Мусатов Даниил – Москва, школа 1543,

Привалов Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Сафарова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Столбов Василий – Советск Кировской обл., лицей,

Ульянов Федор – Иваново, лицей 33;

по 11 классам –

Баутин Михаил – Нижний Новгород, ФМШ 40,

Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,

Грибов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Зильберман Роман – Челябинск, ФМЛ 31,

Исанбаев Павел – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,

Карвонен Максим – Рыбинск, лицей 2,
 Кислицын Александр – Саров, гимназия 15,
 Куликов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Мельников Леонид – Междуреченск, гимназия 20,

Мойкина Татьяна – Ярославль, гимназия 1,
 Николаев Андрей – Омск, лицей 64,
 Скопенков Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
 Шарич Владимир – Москва, СУНЦ МГУ.

Школьники Китая получили 1 диплом I степени, 4 диплома II степени и 1 диплом III степени.

Публикацию подготовил
 С.Токарев

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 19 по 26 апреля этого года в Перми прошел заключительный этап Всероссийской физической олимпиады школьников. В соревнованиях приняли участие 186 учащихся 9 – 11 классов из 63 регионов России.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Теоретический тур

9 класс

1. К диску радиусом R , насаженному на горизонтальный вал мотора, под действием силы тяжести прижимается тяжелый брусок массой M (рис.1).

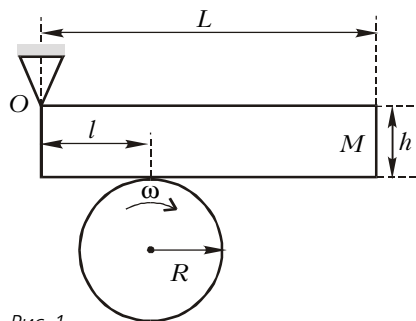


Рис. 1

Брусок может свободно поворачиваться относительно оси O . Длина бруска L , его толщина h . Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии l от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском μ . Предполагая, что мотор может развивать мощность P , определите угловую скорость ω вращения диска в зависимости от величины l . Рассмотрите случаи вращения диска по часовой стрелке (ω^+) и против часовой стрелки (ω^-). Постройте качественные графики $\omega^+(l)$ и $\omega^-(l)$.

С.Козел

2. Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1,2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1,0$ с попал в лапу стрелявшего

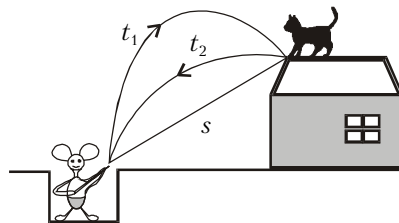


Рис. 2

мышонка (рис.2). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?

Д.Александров, В.Слободянин

3. Известно, что дистиллированную воду, очищенную от примесей, можно охладить без превращения в лед ниже температуры $t_0 = 0^\circ\text{C}$. В зависимости от внешнего давления процесс кристаллизации воды может начаться при различных температурах $t < t_0$. Образовавшийся при этом лед отличается по своим физическим свойствам от обычного льда при температуре 0°C . Определите, чему равна удельная теплота плавления льда λ_2 при температуре $t_1 = -10^\circ\text{C}$. Удельную теплоемкость воды в интервале температур от -10°C до 0°C примите равной $c_1 =$

$= 4,17 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$. Удельную теплоемкость льда в этом интервале температур примите равной $c_2 = 2,17 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$. Удельная теплота плавления льда при температуре 0°C равна $\lambda_1 = 3,32 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$.

В.Орлов

4. Дан «черный ящик» с тремя выводами (рис.3). Известно, что внутри ящика находится некоторая схема, составленная из резисторов. Если к выводам 1, 3 подключить источник напряжением $U = 15 \text{ В}$ и измерить с помощью вольтметра напряжения между выводами 1, 2 и 3, то они оказываются равными $U_{12} = 6 \text{ В}$ и $U_{23} = 9 \text{ В}$.

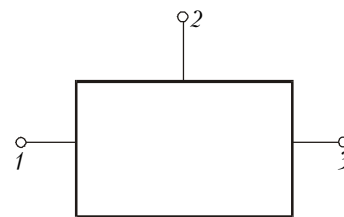


Рис. 3

Если источник подключить к выводам 2, 3, то $U_{21} = 10 \text{ В}$ и $U_{13} = 5 \text{ В}$. Какими будут напряжения U_{13} и U_{32} , если источник подключить к выводам 1, 2? Нарисуйте возможные схемы «черного ящика» с минимальным числом резисторов. Полагая, что наименьшее сопротивление из всех резисторов равно R , найдите сопротивления остальных резисторов.

С.Козел



10 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности колеблется на пружине вдоль оси Ox брусок. По направлению к брусу вдоль оси Ox движется со скоростью v_0 шарик (рис.4), который после упругого удара о брусок отска-

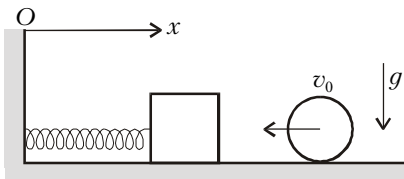


Рис. 4

кивает в противоположном направлении. Масса шарика во много раз меньше массы бруска. График зависимости координаты x бруска от времени t представлен на рисунке 5.

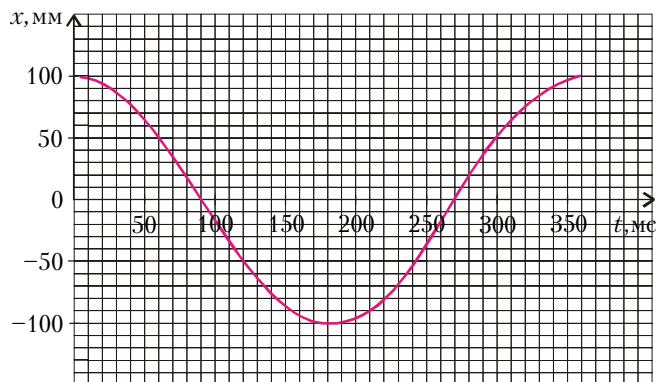


Рис. 5

1) Используя график, найдите максимально возможную скорость шарика после отскока при $v_0 = 0,06$ м/с.

2) При каких значениях v_0 разность Δ между максимально возможной скоростью отскока и v_0 не будет зависеть от v_0 ? Найдите эту разность.

В. Чивилёв

2. Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (рис.6). Масса локомотива m , а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже m .

1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F , найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.

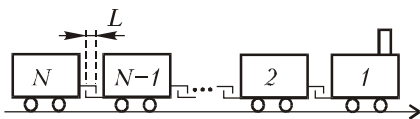


Рис. 6

2) Полагая, что состав очень длинный ($N \rightarrow \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

П. Бойко, Ю. Полянский

3. В воду массой m бросают вещество такой же массы, обладающее следующими свойствами. а) При растворении в воде вещество поглощает энергию λ на каждый килограмм, причем $\lambda/c = 200$ К, где c — удельная теплоемкость вещества, которая равна теплоемкости воды и не меняется при растворении. б) Растворимость вещества в воде, определяемая как отношение массы растворенного вещества к массе растворителя: $\alpha = m_{\text{вещ}}/m_{\text{раств}}$, в насыщенном растворе зависит от температуры (рис.7). Начальная температура вещества $+200$ °С, воды 0 °С. Определите установившуюся температуру раствора $t_{\text{уст}}$ и конечную концентрацию $\alpha_{\text{уст}}$. Тепловыми потерями и испарением пренебречь.

С. Сырицын

4. Кривая ABC (рис.8) является адиабатой для некоторого вещества, у которого внутренняя энергия зависит от произведения pV ,

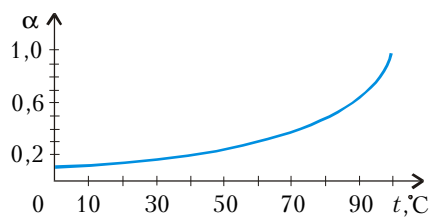


Рис. 7

т.е. $U = U(pV)$. Найдите полное количество теплоты, которое вещество получило в процессе 1—2, изображенном на рисунке.

Д. Абанин

5. В электрической цепи, представленной на рисунке 9, ключ K разомкнут и токи не текут. Определите:

1) Токи через батареи $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ сразу после замыкания ключа.

2) Изменение электростатической энергии ΔW системы после прекращения токов.

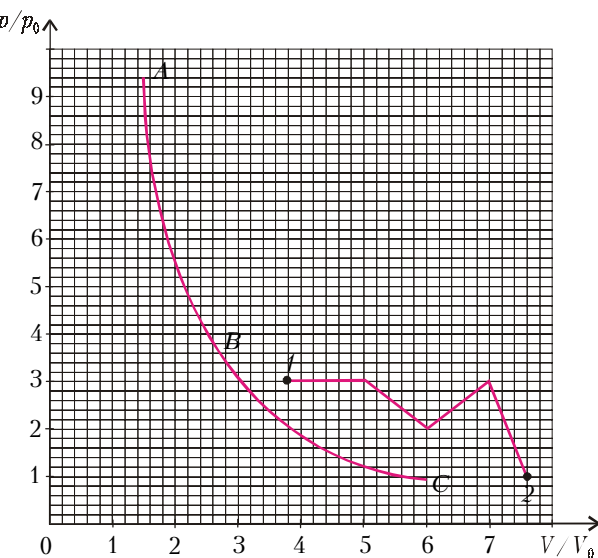


Рис. 8

3) Работы A_1 и A_2 батарей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ за все время процесса.

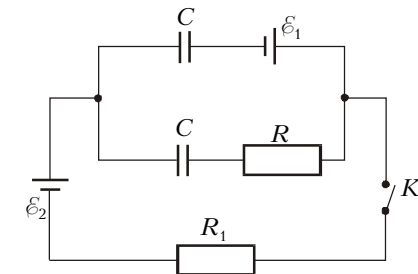


Рис. 9

4) Количество теплоты Q , выделившееся на резисторах после замыкания ключа.

Ю. Чешев

11 класс

1. На два вращающихся в противоположных направлениях цилиндрических валика радиусом $R = 0,5$ м положили длинный однородный брус (рис.10) так, что его центр масс ока-

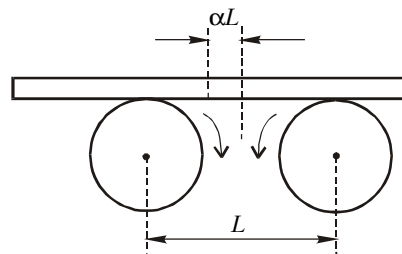


Рис. 10

зался смещенным от оси симметрии на αL , где $\alpha = 3/8$, а $L = 2$ м — расстояние между осями валиков. Затем брус без толчка отпускают. Коэффициент трения между бруском и валиками равен $\mu = 0,3$ и не зависит от их относительной скорости. Угло-

вая скорость вращения валиков $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$. После того как колебания установились, угловую скорость вращения валиков уменьшили в 10 раз. Найдите частоту Ω и амплитуду A_2 новых установившихся колебаний бруса.

А.Варгин

2. К двум точкам A и B , находящимся на одной горизонтали, расстояние

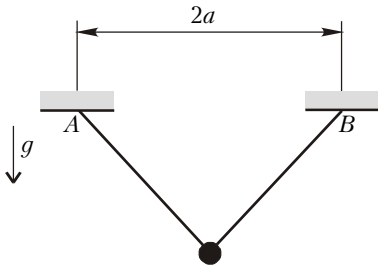


Рис. 11

между которыми $2a$, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис. 11). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g .

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_{\perp}$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

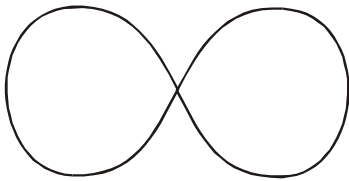


Рис. 12

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_{\parallel}$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 12?

Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \text{ при } x \ll 1.$$

В.Пестун

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. В электростатическом вольтметре сила притяжения между металлическими пластинами плоского конденсатора C измеряется с помощью аналитических весов (рис. 13). При постоянном напряжении $U_1 = 500 \text{ В}$ между пластинами 1 и 2 весы уравниваются разновесом массой $m_1 = 200 \text{ мг}$.

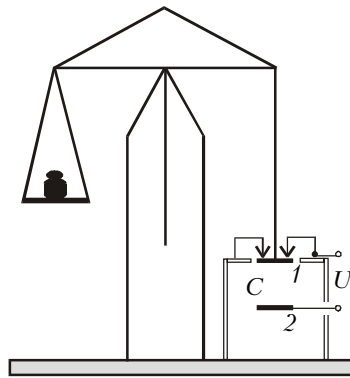


Рис. 13

На пластины конденсатора подается периодическая последовательность треугольных импульсов напряжения с длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ и периодом повторения $T = 0,01 \text{ с}$ (рис. 14). Чему равна амплитуда импульсов U_0 ,

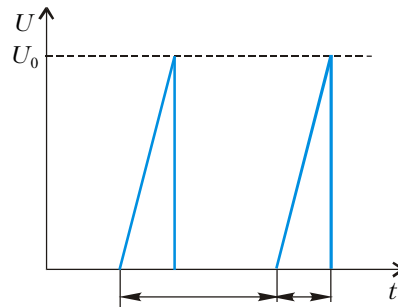


Рис. 14

если в этом случае весы уравниваются разновесом массой $m_2 = 30 \text{ мг}$? Период собственных колебаний весов много больше T .

В.Можаев

5. В электрической цепи с мостиком Уитстона, изображенной на рисунке 15, после установления всех токов размыкают ключ K . Определите, при какой величине сопротивлений R_1 через микроамперметр с внутренним сопротивлением r после размыкания ключа протечет наибольший заряд. Все остальные параметры электрической цепи, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника напряжения и

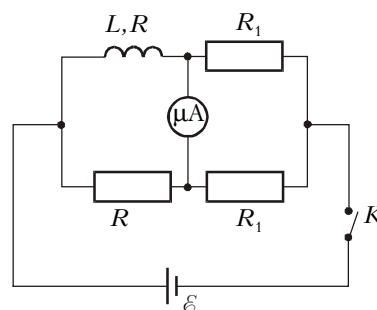


Рис. 15

сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Р.Компанеев

Экспериментальный тур

В работе по составлению и подготовке заданий экспериментального тура приняли участие В.Ефимов, С.Зорин, В.Мызников и С.Полянский.

9 класс

1. Определите сопротивления резисторов $R_1, \dots, R_7$, амперметра и вольтметра.

Оборудование: батарейка от карманного фонаря, лабораторные вольтметр и амперметр, соединительные провода, ключ, резисторы $R_1 - R_7$.

2. Определите коэффициент жесткости пружины.

Оборудование: пружина, линейка, лист миллиметровой бумаги, брусок, груз массой 100 г , вес которого превосходит предел упругости пружины.

10 класс

1. Определите удельную теплоемкость металлического образца.

Оборудование: два геометрически подобных металлических образца, один из которых алюминиевый, термометр или мультиметр с термопарой, секундомер, сосуд с горячей водой, штатив, весы, салфетка, лист миллиметровой бумаги.

Примечание: удельная теплоемкость алюминия $c = 896 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

2. Определите максимально возможную температуру накала вольфрамовой нити лампочки, достижимую с предлагаемым оборудованием. Считать, что температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 0,0048 \text{ К}^{-1}$.

Оборудование: источник постоянного тока с неизвестной ЭДС и неизвестным внутренним сопротивлением, миллиамперметр с известным сопротивлением, два резистора с известными сопротивлениями, одно из которых сравнимо с сопротивлением миллиамперметра, а другое во много раз его превосходит, лампа от карманного фонаря, соединительные провода.

11 класс

1. Определите длину волны излучения полупроводникового лазера и период отражательной дифракционной решетки.

Оборудование: полупроводниковый лазер, два бруска, линейка, экран, алюминиевая фольга, две швейные иглы, стеклянная пластинка, пластилин, часть сектора лазерного дис-

ка, ластик, лист миллиметровой бумаги.

2. Внутри «черного ящика» собрана цепь из последовательно соединенных элементов. Определите, из каких элементов состоит цепь и в какой последо-

вательности они соединены, и найдите их номиналы (значения).

Оборудование: «черный ящик», источник переменного тока с неизвестным напряжением и частотой 50 Гц, резистор с известным сопротивлени-

ем, осциллограф, соединительные провода.

Примечание: с каждого соединения схемы сделан вывод на клемму «ящика», элементы цепи могут быть не идеальными.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Квасов Игорь – Дзержинск, школа 2,
Гибински Алексей – Дубна, лицей
«Дубна»;

по 10 классам –

Калинин Вячеслав – Клин, школа 1,
Манаков Андрей – Озерск, ФМЛ 39,
Щербаков Роман – Подпорожье, шко-
ла 8,

Румянцев Андрей – Москва, СУНЦ
МГУ,

Гатанов Тимур – Санкт-Петербург,
ФМГ 30,

Королев Кирилл – Челябинск, ФМЛ
31,

Четвериков Денис – Вологда,
ВГЕМЛ;

по 11 классам –

Ротаев Михаил – Новосибирск, шко-
ла-колледж 130,

Вахов Алексей – Пермь, ФМШ 146,
Ващенко Андрей – Брянск, лицей 1,

Панов Евгений – Челябинск, ФМЛ
31,

Алферов Роман – Челябинск, ФМЛ
31,

Вавилов Виталий – Небережные Чел-
ны, лицей 78.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Антышев Евгений – Волгореченск
Костромской обл., школа 2,

Булычев Петр – Москва, лицей «Вто-
рая школа»,

Маврин Павел – Тольятти, лицей 51,
Ражев Михаил – Дубна, лицей «Дуб-
на»,

Гейко Василий – Нижний Новгород,
гимназия 87,

Журавлев Михаил – Ноябрьск Яма-
ло-Ненецкого АО, лицей 10;

по 10 классам –

Дзябура Василий – Сергиев Посад,
ФМШ 2,

Ахмеров Антон – Краснообск Ново-
сибирской обл., СУНЦ НГУ,

Муравьев Вячеслав – Смоленск, гим-
назия,

Швецов Павел – Киров, ФМЛ,
Климай Петр – Курган, Лингво-гума-
нитарная гимназия 47,

Семенов Дмитрий – Санкт-Петербург,
ФТШ,

Нургалiev Данияр – Казань, ФМЛ
131,

Нестеренок Александр – Санкт-Пе-
тербург, ФТШ,

Семенов Андрей – Саров, гимназия
15,

Соболев Михаил – Долгопрудный,
лицей 11 «Физтех»,

Терентьев Евгений – Чебоксары, гим-
назия 34;

по 11 классам –

Шутович Андрей – Санкт-Петербург,
ФТШ,

Жук Сергей – Вологда, ВГЕМЛ,
Ефимов Артем – Березники, школа 3,

Попов Илья – Москва, лицей «Вторая
школа»,

Салтыков Петр – Дубна, лицей «Дуб-
на»,

Чепель Владислав – Санкт-Петербург,
ФМЛ 239,

Розутов Владимир – Юбилейный Мос-
ковской обл., гимназия 3,

Шукин Иван – Волгодонск, школа
24.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Захаркин Александр – Чебокса-
ры, Политехническая школа-гимна-
зия,

Завьялов Андрей – Пермь, ФМШ 146,
Калинин Петр – Нижний Новгород,

лицей 40,

Касаткин Алексей – Уфа, УЭМШК
106,

Назаренко Максим – Санкт-Петер-
бург, ФМЛ 239,

Сепп Янус – Таллин, Реальная шко-
ла,

Скрипачев Павел – Чебоксары, школа
53,

Идрисов Георгий – Бийск, лицей,
Кондратьев Андрей – Саратов, ФТЛ
1,

Самоко́тин Алексей – Челябинск,
ФМЛ 31,

Фудин Дмитрий – Москва, гимназия
1567,

Кротов Александр – Архангельск,
школа 22,

Николаев Сергей – Брянск, лицей 1,

Сухомлин Кирилл – Ростов-на-Дону,
лицей 1 при РГУ,

Дружинин Андрей – Ноябрьск Ямало-
Ненецкого АО, лицей 10;

по 10 классам –

Карманов Максим – Челябинск, ФМЛ
31,

Страбыкин Александр – Киров, ФМЛ,
Мальшиев Александр – Казань, лицей
83,

Нагорный Юрий – Москва, ФМОШЛ
444,

Терещенко Евгений – Майкоп, лицей
34,

Гребенников Сергей – Омск, ФМШ
64,

Береснев Николай – Киров, ФМЛ,
Подшивалов Вячеслав – Иркутск, ли-
цей 2,

Шемятихин Дмитрий – Ульяновск,
школа 40;

по 11 классам –

Кузьмин Денис – Киров, ФМЛ,
Панфилов Андрей – Майкоп, школа
17,

Харитонов Александр – Дубна, лицей
«Дубна»,

Иванов Евгений – Йошкар-Ола, шко-
ла ПЛИРМЭ,

Мамонов Алексей – Воронеж, Поли-
технический лицей 1,

Клиньшов Владимир – Нижний Нов-
город, лицей 40.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин