



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
тел. : [095] 930-56-48  
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 5 - 2000 г. / Школа в «Кванте»

**А. Стасенко**

***Как Студент на сверхзвук выходил (9 кл.)***

***Где найти прошлогоднюю зиму? (10 кл.)***

***Хочешь общаться - излучай (11 кл.)***

© «Квант»

***Использование или распространение этого материала  
в коммерческих целях  
возможно лишь с разрешения редакции***



Образовательный сетевой выпуск  
**VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!**

<http://vivovoco.nns.ru>  
<http://vivovoco.rsl.ru>

## Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как Студент на сверхзвук вышел» предназначена девятиклассникам, заметка «Где найти прошлогоднюю зиму?» – десятиклассникам и «Хочешь общаться – излучай» – одиннадцатиклассникам.

# Как Студент на сверхзвук вышел

À.ÑÒÀÑÃÁ Í ÊÎ

Не делай ничего наугад, а только по правилам искусства.

Марк Аврелий

В НОЧЬ ПЕРЕД ЭКЗАМЕНОМ ПО аэродинамике приснился Студенту страшный сон – будто, падая с кровати, достиг он сверхзвуковой скорости. Вскочив в холодном поту, задумался Студент: в самом деле, с какой высоты нужно упасть, чтобы достичь сверхзвука в атмосфере Земли? Вопрос не праздный – ведь этот можно было бы обойтись без аэродинамических труб, требующих большой мощности для разгона воздуха! И еще преимущество: поток воздуха в аэродинамической трубе неизбежно турбулентный (возмущенный), а в атмосфере турбулентность естественная, может быть, как раз такая, как в реальном полете. И еще важное соображение: исследуемое тело, например самолет или его модель, может быть любых размеров, в отличие от (поневоле) малых размеров в трубе. И

еще... Но и перечисленных прелестей казалось достаточно, чтобы Студент с воодушевлением взялся за физические оценки.

Еще в школе он знал, что тело, сброшенное с высоты  $l$ , достигает (в вакууме) скорости (рис.1, слева)

$$v_0 = \sqrt{2g} \cdot l. \quad (1)$$

Значит, чтобы достичь скорости порядка 330 м/с, высота должна быть равна

$$l = \frac{v_0^2}{2g} \approx \frac{(3,3 \cdot 10^2)^2}{2 \cdot 10} \text{ м} \approx 5 \text{ км}.$$

(Конечно, не обязательно падать вертикально: можно, привязав тело к нити длиной  $l$ , достичь той же скорости в нижней точке колебаний. Что гораздо лучше: опыт будет снова и снова повторяться, пока продолжатся коле-

бания – в отличие от одноразового падения вниз.)

Но в вакууме никакого звука нет – значит, нет и понятия сверхзвукового движения. А воздух будет оказывать сопротивление движению, и качественно ясно, что начальная высота, падая с которой тело может достичь сверхзвуковой скорости, должна быть больше полученной выше оценки. И, значит, на таких масштабах плотность атмосферы  $\rho$  уже не придется считать постоянной величиной (см. рис.1, справа) – об этом отлично знают альпинисты.

Силу сопротивления можно описать, исходя из соображений размерностей:

$$F = C \frac{\rho v^2}{2} S. \quad (2)$$

Здесь  $\rho v^2/2$  – так называемый скоростной напор (он имеет размерность давления),  $S$  – характерная площадь тела, например его лобового сечения. А вот  $C$  – это безразмерный коэффициент сопротивления, который теория размерностей, естественно, «не чувствует». Ради его измерения и построены во всем мире мощные аэродинамические трубы, ради него Студент и задумался.

Так возник Проект Экспериментальной Установки.

Возьмем невесомую нерастяжимую нить длиной  $l$ , подвесим на ней сверхзвуковой авиалайнер (например, ТУ-144) или истребитель массой  $m$  и, приведя этот «математический маятник» в горизонтальное положение, отпустим (см. рис.1, в центре). Потенциальная энергия самолета в любой точке его траектории, характеризующейся углом  $\varphi$ , равна

$$mgl(1 - \cos \varphi).$$

Проверим: в начальной точке, когда  $\varphi = -\pi/2$ ,  $\cos \varphi = 0$  и эта энергия равна  $mgl$ , а при  $\varphi = 0$  (в самой нижней точке траектории) она равна нулю.

Не будь потерь энергии на сопротивление, суммарная механическая энергия сохранялась бы (собственно, из этого условия и найдена скорость  $v_0$  в формуле (1)):

$$m \left( \frac{v^2}{2} + gl(1 - \cos \varphi) \right) = mgl. \quad (3)$$

Но если есть сила сопротивления, то суммарная механическая энергия колеблющегося тела будет убывать. Работа силы сопротивления на неболь-

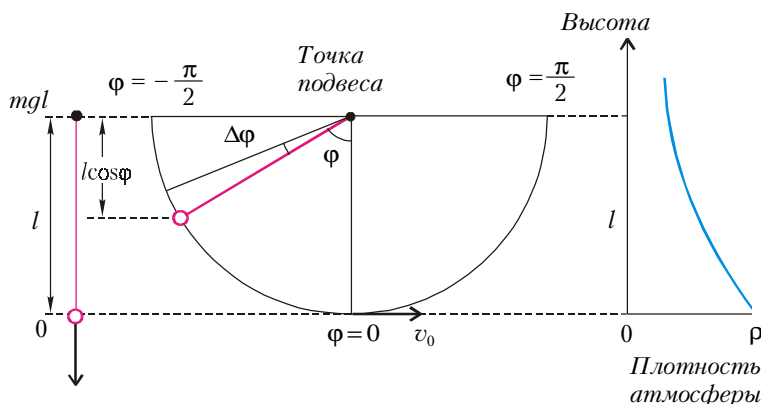


Рис. 1

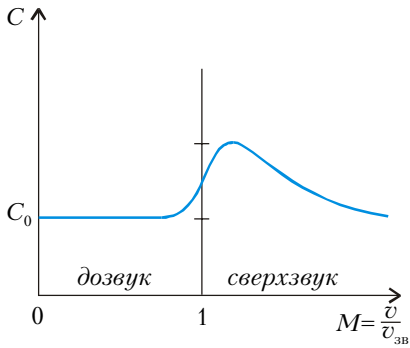


Рис. 2

шом участке пути длиной  $l\Delta\varphi$  равна, очевидно,  $F\Delta\varphi$ . Значит, учитывая выражения (2) и (3), можно записать

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2} + gl(1 - \cos\varphi)\right) = -\frac{v^2}{2}\left(C\frac{\rho S l}{m}\right)\Delta\varphi. \quad (4)$$

Обозначим набор величин в правой части в скобках одной буквой:

$$\beta = \frac{C\rho S l}{m}.$$

Вообще говоря, это не постоянная. Действительно, первая же оценка по формуле (1) показала, что проектируемое устройство будет циклопическим сооружением, поэтому плотность воздуха  $\rho$  будет заметно изменяться на таких масштабах. Да и безразмерный коэффициент сопротивления  $C$  не постоянен, а зависит от отношения скорости движения тела к скорости звука  $v_{зв}$ , т.е. от числа Маха  $M = v/v_{зв}$ . Вблизи  $M = 1$  он резко возрастает (рис.2), а затем уменьшается с ростом  $M$  (для чего и делаются стреловидные крылья у сверхзвуковых самолетов). Конечно, все это можно учесть в правой части уравнения (4) и, решив его, например численно на компьютере, сравнить результаты теории и эксперимента, из чего и будет получена информация об искомом коэффициенте сопротивления.

Но Студент сделал проще. Чтобы оценить все-таки длину подвеса, при которой лайнер заведомо достигнет скорости звука, он сделал *Оценку Сверху*, или, как изящно выражаются математики, мажорировал. Для этого он выбрал для плотности самое большое значение  $\rho_0 \approx 1 \text{ кг/м}^3$  (у поверхности Земли), для коэффициента сопротивления взял максимальное

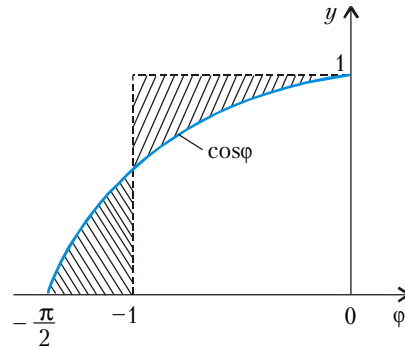


Рис. 3

значение (приблизительно вдвое большее, чем при дозвуковых скоростях)  $C \approx 2C_0$ , а скорость в выражении для работы силы сопротивления решил мажорировать ее значением для случая вакуума, которое получается из выражения (3):

$$(v^0)^2 = 2gl \cos\varphi = v_0^2 \cos\varphi.$$

Итак, в формуле (4) справа стоит убыль механической энергии, заведомо бо́льшая (по модулю), чем в реальности, но зато теперь можно проще узнать, сколько будет «съедено» энергии, например на участке траектории от верхней точки ( $\varphi = -\pi/2$ ) до нижней ( $\varphi = 0$ ). Для этого надо сложить все потери энергии на каждом малом  $\Delta\varphi$ , или, как говорят взрослые, проинтегрировать функцию

$$-\beta_{\max} \frac{v_0^2}{2} \cos\varphi,$$

где, по договору,  $\beta_{\max} = 2C_0\rho_0 S l/m$ . При этом придется найти площадь под кривой  $y = \cos\varphi$  (рис.3). Кто умеет, да возьмет интеграл:

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos\varphi d\varphi = \sin\varphi|_{-\pi/2}^0 = 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

А кто не умеет, и так поймет, взглянув на рисунок 3, что эта площадь порядка единицы (там для наглядности заштрихованы участки одинаковой площади).

Теперь изменение суммарной механической энергии можно записать так:

$$\left(\frac{v^2}{2} + gl(1 - \cos 0)\right) - \left(0 + gl\left(1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = -\beta_{\max} gl \cdot 1.$$

Потребуем, чтобы скорость тела в нижней точке ( $\varphi = 0$ ) стала равной скорости звука:  $v = v_{зв}$ , и учтем, что  $\cos 0 = 1$ , а  $\cos(-\pi/2) = 0$ . Тогда

$$\left(\frac{v_{зв}^2}{2} + 0\right) - (0 + gl) = -\beta_{\max} gl.$$

В результате получим квадратное уравнение для искомой длины  $l$ :

$$v_{зв}^2 = 2g(1 - \beta_{\max})l = 2g\left(1 - \frac{2C_0\rho_0 S l}{m}\right)l.$$

Подставляя характерные значения величин для «типичных» сверхзвуковых истребителей:  $m = 30 \text{ т}$ ,  $S = 50 \text{ м}^2$ ,  $C_0 = 0,01$ , найдем

$$l_1 \approx 7 \text{ км и } l_2 \approx 20 \text{ км}.$$

Даже меньший из этих двух корней сравним с высотой самых высоких гор на Земле.

И еще одна мысль пронзила Студента: центробежная сила!? Ведь вблизи нижней точки центростремительное ускорение будет равно

$$\frac{v_{зв}^2}{l} \approx 1,5g,$$

значит, перегрузка составит  $2,5g$  – лайнер «потяжелеет», и это надо учесть при выборе троса.

Таким образом, если пропилить в самой высокой горе пропасть с вертикальными стенками шириной в несколько размахов крыла, затем наверху установить горизонтальную ось вращения, подвесить лайнер на тросе длиной семь километров... – работы хватит всем и надолго. А кстати, где можно достать тонкую (желательно не растяжимую) нить длиной несколько километров, способную выдержать вес нескольких авиалайнеров?

С этими мыслями Студент и пошел на экзамен по экспериментальной аэродинамике. Результат экзамена в летописях не сохранился...

# Где найти прошлогоднюю зиму?

À.ÑÒÀÑÃ Í Ê Î

Большие керамические сосуды для хранения продуктов, чтобы охладить их, зарывали в землю на глубину, превышающую человеческий рост (найлены в Кноссе, Трое, Тиринфе).

Словарь античности

ВЕЛИКИЙ ЛУКРЕЦИЙ ВЕСЬМА любопытно объяснил полугодовую периодичность колебаний температуры на некоторой глубине под землей:

«Летом в колодцах вода холодной,  
потому что от зноя  
Пористой почва тогда и скорей  
выпускает на воздух  
Жара она семена, какие в ней  
только найдутся.  
...В холод, напротив, она,  
под давлением стужи сжимаясь,  
Как бы смыкается вся и,  
сходясь все плотней и плотнее,  
Весь свой остаток тепла выжимает,  
конечно, в колодцы».

С тех пор физика выработала более строгие понятия, чем «семена жара» или «давление стужи», — скажем, такие вполне измеримые величины, как плотность  $\rho$  или удельная теплоемкость  $c$ . Эти понятия сейчас пригодятся нам. А еще одна важная физическая величина, имеющая отношение к делу, называется *теплопроводностью* (или коэффициентом теплопроводности). О ней стоит поговорить особо. Вводится она очень просто и, как все в науке, практически целесообразно.

Например, нужно узнать, сколько тепла ежесекундно уходит зимой через каждый квадратный метр стены дома на улицу — это ведь поможет рассчитать количество дров, угля или электроэнергии, необходимое для отопления помещения. Пусть температуры внутренней и наружной поверхностей стены  $t_v$  и  $t_n$ , а ее толщина  $h$ . Тогда искомую плотность потока тепла  $q$ , его размерность  $[q] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , записывают в виде

$$q = \lambda \frac{t_v - t_n}{h}. \quad (1)$$

Вот здесь уже и введен коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Предполагает-

ся, что этот коэффициент не зависит ни от температур, ни от толщины стенки, а характеризует только свойства ее вещества, так что строитель может найти его значение в Справочнике.

Из записанного равенства легко установить размерность коэффициента теплопроводности:  $[\lambda] = \text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$ . Для наших целей важно, что сюда входит единица времени. Это позволяет из всех перечисленных величин  $\rho$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $\lambda$  составить комбинацию, имеющую размерность времени:

$$\tau \sim \frac{\rho c}{\lambda} h^2.$$

Для чего? А для того чтобы узнать глубину  $h_{T/2}$ , на которую «дойдет» температура, полгода назад ( $\tau = T/2$ ) бывшая на поверхности Земли. Отсюда получим

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{\lambda T}{\rho c}}. \quad (2)$$

Конечно, физические свойства «земли», «почвы» чрезвычайно разнообразны — наверняка суглинок, чернозем и гранит отличны друг от друга по плотности, теплоемкости и теплопроводности. Но для комплекса  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

можно принять некое «среднее» значение  $2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , этот комплекс так прямо и называется *температуропроводностью*. А сколько секунд содержит один год? Посчитаем:

$$T = 3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}} \cdot 24 \frac{\text{ч}}{\text{сут}} \cdot 365 \text{ сут} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с}.$$

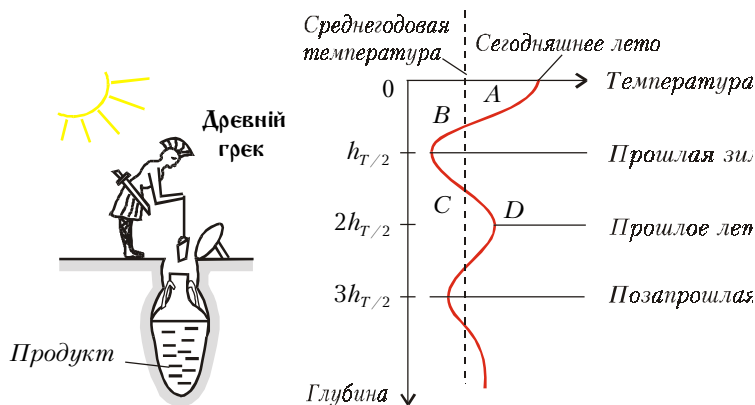
Подставляя все это в полученную для  $h_{T/2}$  формулу, имеем оценку

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{aT}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ с}}{2}} \sim 2 \text{ м}.$$

Разумеется, это всего лишь оценка по порядку величины, но и она говорит о том, почему древние греки зарывали сосуды глубже своего роста — там проходит волна холода от прошлой зимы, когда на поверхности царит лето.

На рисунке качественно изображена «мгновенная картина» распределения температуры по глубине. Но почему колебания температуры постепенно уменьшаются с глубиной? Все из-за той же теплопроводности: с одной стороны, она позволяет тепловой энергии проникать внутрь земли, а с другой — она же способствует «рассасыванию горбов и впадин» температуры. В частности, по «склону»  $AB$  тепловая энергия течет вглубь, а по склону  $DC$  — вверх, согласно соотношению (1).

Аналогичную мгновенную картину распределения температуры можно нарисовать и для звуковой волны в воздухе. К счастью, при тех частотах, на которых мы общаемся друг с другом или слушаем музыку, теплопроводность воздуха не играет большой роли: его последовательные сжатия и разрежения происходят так быстро, что теплопроводность не успевает сгладить «горбы и впадины» температуры. Или, как сказал бы физик, *дисперсия* и *затухание* акустической волны незначительны. Но об этом ли думал древний грек, зарывая амфору?..



# Хочешь общаться – излучай

À.ÑÒÀÑÃÁ Í Ê Î

*Возможность воздействия одного тела на другое на расстоянии через пустоту без посредства чего-нибудь еще... – для меня это настолько бессмысленно, что, по-моему, к такому заключению никогда не может прийти человек, обладающий достаточной способностью разбираться в философских вопросах.*

И.Ньютон

ДЕЙСТВИТЕЛЬНО, ЕСЛИ ВЫ ПОТЕРЯЛИ в лесу родных или знакомых, рекомендуется кричать «ау!». Правда, тут нет пустоты – акустические волны распространяются в воздухе. Но во Вселенной громадную роль играют волны, способные распространяться и в вакууме.

Представим себе два заряда противоположного знака – один тяжелый положительный, другой легкий отрицательный, вращающийся вокруг первого (рис.1). Кто подумал, что это атом водорода с протоном в центре, – не совсем прав, поскольку микромир

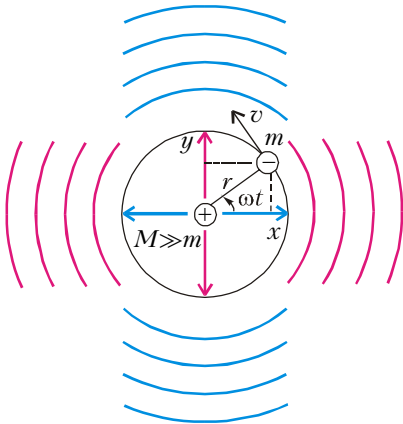


Рис. 1

нужно описывать при помощи квантовой механики, а мы собираемся остаться в рамках «обычной» физики. Просто имеем два заряда, и один из них вращается вокруг другого.

Ясно, что это *вращение* можно представить как два взаимно перпендикулярных *колебания* со сдвигом фаз на  $\pi/2$ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \omega t + r^2 \sin^2 \omega t = r^2$$

(ибо, как хорошо известно,  $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ ). Тут мы еще раз вспомнили, что даже *равномерное* движение по окружности есть ускоренное движение, да не одно, а два. Можно сказать также, что мы имеем два *диполя* (с переменным расстоянием между зарядами).

Но, как учат в школе (и правильно делают), каждый колеблющийся заряд излучает, причем мощность этого излучения пропорциональна четвертой степени частоты. В результате осциллятор – в нашем случае это диполь – каждую секунду должен терять свою энергию  $W$  так, что

$$\frac{dW}{dt} \sim -\omega^4. \quad (1)$$

Выразим энергию диполя через расстояние между зарядами  $r$  и величину заряда  $q$ . Сила их кулоновского взаимодействия (притяжения) равна

$$F_K = -k \frac{q^2}{r^2},$$

следовательно, потенциальная энергия взаимодействия есть

$$W_p = -k \frac{q^2}{r}.$$

Кинетическую энергию  $W_k = mv^2/2$  (центральный заряд тяжел и «неподвижен») можно переписать с учетом того, что кулоновская сила обеспечивает центростремительное ускорение, равное

$$\frac{v^2}{r} = \frac{kq^2}{mr^2}.$$

Тогда полная энергия системы, рав-

ная сумме потенциальной и кинетической энергий, будет

$$W = W_p + W_k = -\frac{kq^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{kq^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{kq^2}{r}$$

(отрицательный знак описывает тот факт, что движущийся заряд не может уйти «на бесконечность»).

Поработаем теперь над выражением (1), стараясь уравнивать хотя бы размерности его обеих частей.

Прежде всего заметим, что изменение энергии в единицу времени пропорционально самой энергии в данный момент времени. Это довольно общее положение. Например, убыль атомов некоего радиоактивного изотопа пропорциональна имеющемуся количеству атомов:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N,$$

где  $\tau$  – характерное время распада, откуда получается экспоненциальный закон

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Или, увеличение числа микробов в питательном бульоне в единицу времени пропорционально их наличному количеству:

$$\frac{dn}{dt} = +\alpha n,$$

откуда опять-таки

$$n = n_0 e^{\alpha t}.$$

Точно так же скорость роста денежного вклада в банке пропорциональна наличности в данный момент (если не учитывать «черных» вторников, сред,...).

Таким образом, выражение (1) можно уже несколько конкретизировать:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\omega^4. \quad (2)$$

В результате слева имеем размерность  $1/c$ , справа  $1/c^4$ . Далее, поскольку речь идет об электромагнитном излучении, совершенно естественно вспомнить о скорости света в вакууме  $c$ , которая имеет размерность м/с и содержит в знаменателе так нужную нам секунду в первой степени:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{\omega^4}{c^3}. \quad (3)$$

Но что это – теперь справа в знаменателе стоит лишний  $m^3$ . А у нас как раз есть характерный размер  $r$ ! Запишем:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{r^3 \omega^4}{c^3} \sim -\frac{1}{\tau}. \quad (4)$$

Наконец, с размерностями все в порядке, но это все еще не равенство: мы не знаем, какой *безразмерный* множитель может появиться в правой части. Ну и Бог с ним – мы и так знаем достаточно много. Например, можно оценить характерное время  $\tau$ , за которое энергия осциллятора заметно изменится (например, в два раза):

$$\tau \sim \frac{c^3}{r^3 \omega^4}.$$

Если говорить об излучении атома в оптическом диапазоне, можно взять  $\omega \sim 10^{16}$  1/с,  $r \sim 10^{-10}$  м = 1 Å. Тогда

$$\tau \sim \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^3}{(10^{-10} \text{ м})^3 (10^{16} \text{ 1/с})^4} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

С точки зрения «доквантовой» механики, за это характерное время все электроны должны были бы упасть на ядра своих атомов и Вселенная прекратила бы свое существование, по крайней мере в комфортном для нас виде. Этот Конец Света предотвратила квантовая механика: она позволила электронам вращаться на некоторых избранных (квантованных) уровнях достаточно долго. Но наша оценка не бесполезна: она оказалась оценкой характерного *времени перехода* между этими разрешенными уровнями.

Однако перейдем теперь к излучению другого рода – гравитационному. Вселенной управляет всемирное тяготение. И даже если муха в соседнем доме перелетит с одной стены на другую, это в принципе изменит распреде-

ление гравитационного поля во всей Вселенной, в том числе и у вашего рабочего стола. И это изменение передается при помощи гравитационных волн, которые распространяются со скоростью  $c$ , как и электромагнитные волны в вакууме. Только, в отличие от последних, от гравитационных волн нельзя экранироваться – они проникают всюду, но именно потому их и нелегко зарегистрировать. А было бы так заманчиво следить за перемещением любого интересующего нас тела!

Конечно, полет мухи мало что изменит во Вселенной. Другое дело – движения небесных тел. Основными источниками гравитационных волн являются быстро вращающиеся пульсары, входящие в двойные звездные системы (рис.2,а); ими могут быть также неосесимметричные волчки (рис.2,б). Иными словами, для излучения гравитационных волн важна определенная *асимметрия* систем; их излучение является не дипольным, а *квадрупольным*. (Те, кто бывал на дискотеках, понимают, что «квадро» означает «четыре».)

Попробуем описать это излучение. Если гравитирующий волчок можно охарактеризовать массой  $m$ , характерным размером  $r$  и скоростью вращения  $\omega$ , то легко понять, что его вращательная энергия  $W \sim mr^2 \omega^2$ . Оказывается, скорость убыли этой энергии тоже пропорциональна  $\omega^4$ , так что, аналогично выражению (2), можно записать

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\omega^4.$$

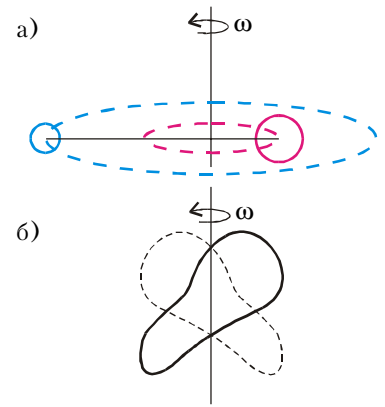


Рис. 2

Однако сюда должны войти величины, характерные именно для гравитации – конечно же, постоянная всемирного тяготения  $G$ , имеющая размерность  $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ , и скорость распространения  $c$  с размерностью м/с:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{G\omega^4}{c^5}.$$

Но теперь справа имеем размерность  $1/(\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг})$ , а нужна 1/с. Ясно, что правую часть надо умножить на  $mr^2$  – и все будет в порядке:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{Gmr^2}{c^5} \omega^4 \sim -\frac{1}{\tau}.$$

По этому выражению можно найти и характерное время  $\tau$  замедления вращения звездной системы, излучающей гравитационные волны. Но это предоставим жителям ее планет... если кому-то нравится жить в поле двойной звезды.