



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 2000 г. / Практикум абитуриента

В. Можаяев

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://vivovoco.nns.ru>
<http://vivovoco.rsl.ru>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

В. МОЖАЕВ

Судя по названию статьи ясно, что речь будет идти о волновых свойствах света. Волновые представления используются при описании таких хорошо известных физических явлений, как интерференция и дифракция света. С этими явлениями тесно связано очень важное понятие когерентности волн.

Пусть в некоторую точку пространства от двух источников приходят два монохроматических волновых возмущения с одинаковой длиной волны λ . Если источник 1 находится на расстоянии r_1 от точки наблюдения, а источник 2 – на расстоянии r_2 , то зависимость, например для электромагнитной волны, напряженности электрического поля в данной точке, создаваемой обеими электромагнитными волнами, будет иметь вид

$$E(t) = E_{01} \cos(\omega t - kr_1) + E_{02} \cos(\omega t - kr_2),$$

где E_{01} и E_{02} – амплитуды напряженностей электромагнитных волн, $\omega = 2\pi c/\lambda$ – их круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (считаем, что начальные фазы волн совпадают). Происходит сложение двух колебаний, сдвинутых по фазе на величину $\Delta\phi = (\omega t - kr_1) - (\omega t - kr_2) = k(r_2 - r_1)$. Два колебания считаются когерентными, если за время наблюдения разность фаз $\Delta\phi$ остается постоянной. В этом случае амплитуда E_0 результирующего колебания за-

висит от $\Delta\phi$ и остается неизменной за время наблюдения:

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Delta\phi}.$$

К сожалению, монохроматическая волна – это чисто математическое понятие, такие волны не имеют физического смысла, их нет в природе. (Наиболее близкие к монохроматическим волны излучают оптические квантовые генераторы, т.е. лазеры.) Нет в природе и когерентных источников, т.е. источников, излучающих когерентные волны. В различных оптических схемах для получения интерференционной картины в качестве когерентных источников обычно используют два мнимых источника, полученных от одного действительного, или один действительный, а другой – его мнимое изображение.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных оптических схем.

Задача 1. Любую оптическую схему по наблюдению интерференционной картины можно представить в упрощенном виде, изображенном на рисунке 1. Два точечных когерентных источника S_1 и S_2 , излучающих свет с длиной волны λ , находятся на расстоянии d друг от друга. На расстоянии L от источников расположен экран. Определите ширину интерференционных полос при условии, что $d \ll L$.

Очевидно, что интерференционная картина в плоскости рисунка 2 сим-

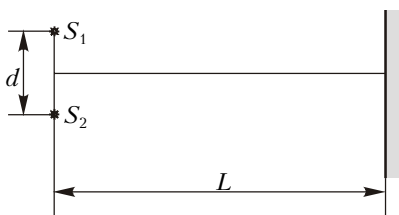


Рис. 1

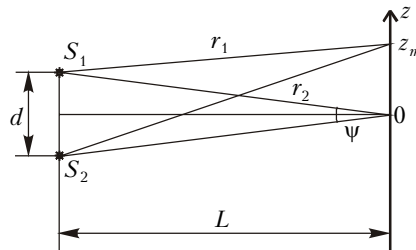


Рис. 2

метрична относительно начала координат ($z = 0$).

Пусть координата m -го максимума интенсивности равна z_m . Это означает, что в точку с координатой z_m от источников S_1 и S_2 приходят волны с оптической разностью хода, равной $m\lambda$, где m – некоторое целое число, т.е.

$$r_2 - r_1 = m\lambda.$$

Из рисунка 2 находим

$$r_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + z_m\right)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(z_m - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

С учетом того, что $d/2 + z_m \ll L$, можно записать

$$r_2 = L \sqrt{1 + \left(\frac{d/2 + z_m}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(d/2 + z_m)^2}{2L},$$

$$r_1 = L \sqrt{1 + \left(\frac{z_m - d/2}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(z_m - d/2)^2}{2L},$$

откуда

$$r_2 - r_1 \approx \frac{dz_m}{L}.$$

В этом приближении условие того, что максимуму m -го порядка соответствует координата z_m , имеет вид

$$\frac{dz_m}{L} = m\lambda.$$

Аналогично, для соседнего максимума $(m+1)$ -го порядка запишем

$$\frac{dz_{m+1}}{L} = (m+1)\lambda,$$

где z_{m+1} – координата максимума $(m+1)$ -го порядка.

Ширина интерференционных полос Δx – это расстояние между двумя соседними максимумами, т.е.

$$\Delta x = z_{m+1} - z_m = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\psi},$$

где $\psi = d/L$ – угол сходимости интерферирующих лучей.

Приведем без вывода точное выражение для ширины интерференционных полос:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin(\psi/2)}.$$

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с. 34)

При малых углах сходимости оно переходит в полученное ранее приближенное выражение.

Задача 2. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 получена система интерференционных полос на экране AB , удаленном от источников на $a = 2$ м (рис. 3). Расстояние между источниками $d \ll a$. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 25$ см? Рассмотрите два случая: расстояние линзы от источников равно $2F$; источники находятся в фокальной плоскости линзы.

Решение этой задачи будем основывать на выражении, полученном для ширины интерференционных полос в предыдущей задаче.

В отсутствие линзы угол сходимости интерферирующих лучей ψ мал и ширина интерференционных полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda a}{d}.$$

Если собирающая линза расположена на расстоянии $2F$ от источников, когерентными источниками, создающими на экране AB интерференционную картину, являются два действительных изображения S'_1 и S'_2 (рис. 4). Очевидно, что расстояние между этими источниками также равно d , а угол сходимости равен $\psi_1 = d/(a - 4F)$. Ширина интерференционных полос в

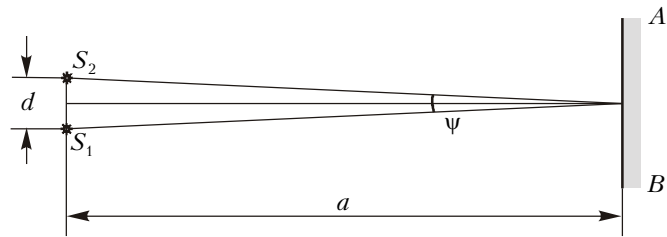


Рис. 3

этом случае будет

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\psi_1} = \frac{\lambda(a - 4F)}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x} = \frac{a - 4F}{a} = \frac{1}{2},$$

т.е. ширина полос уменьшится в два раза.

Если источники S_1 и S_2 будут находиться в фокальной плоскости линзы, когерентные источники S'_1 и S'_2 будут мнимыми и расположенными на бесконечности слева от линзы на продолжении прямых S_1O и S_2O (рис. 5). На экран AB будут падать два параллельных пучка лучей с углом сходимости $\psi_2 = d/F$. Ширина интерференционных полос будет

$$\Delta x_2 = \frac{\lambda}{\psi_2} = \frac{\lambda F}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x} = \frac{F}{a} = \frac{1}{8},$$

т.е. в этом случае ширина полос уменьшится в 8 раз.

Задача 3. В интерференционной схеме используется квазимонохроматический источник света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и экрана $\mathcal{E}$, на котором наблюдается интерференционная картина (рис. 6). Найдите: 1) ширину интерференционных полос Δx на экране; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный и минимальный порядки интерференции и число наблюдаемых полос. Параметры схемы: $L = 1$ м, $2d = 2,5$ см, $D = 10$ см.

1) В данной интерференционной схеме когерентными источниками являются два мнимых изображения источника S в отражающих зеркалах. На рисунке 7 это источники S' и S'' . Угол сходимости интерферирующих лучей равен углу $S'OS''$ и составляет

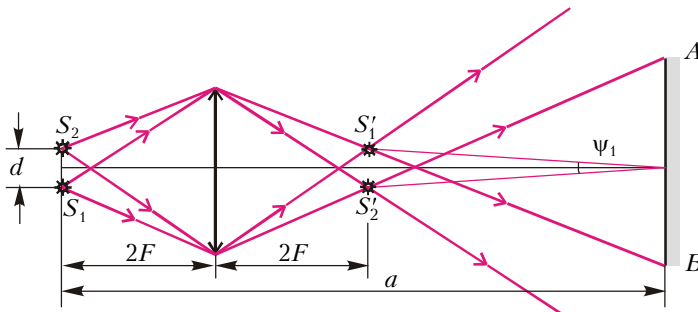


Рис. 4

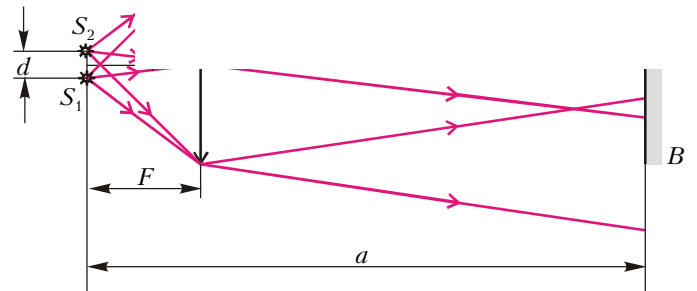


Рис. 5

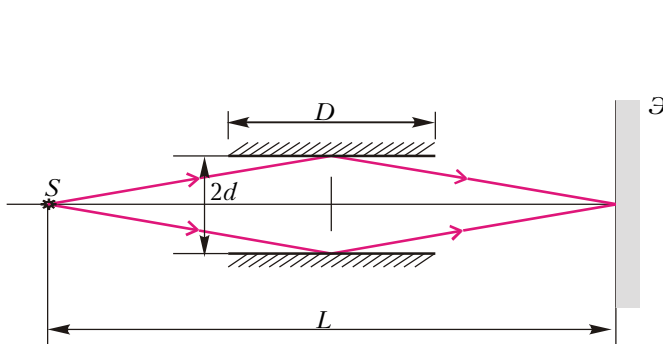


Рис. 6

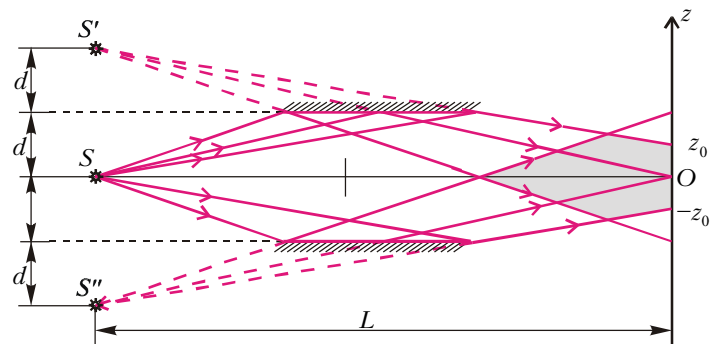


Рис. 7

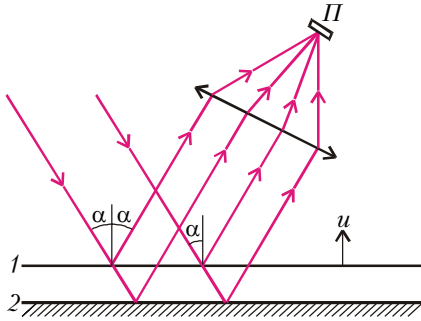


Рис. 8

$\psi = 4d/L$. Ширина интерференционных полос равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda L}{4d} = 10^{-3} \text{ см.}$$

2) Область локализации полос на экране определяется областью пересечения интерферирующих пучков:

$$|z| \leq z_0, \text{ где } z_0 = \frac{2dD}{L+D} = 0,227 \text{ см.}$$

3) Интерференционная картина на экране будет симметричной относительно начала координат ($z = 0$). Непосредственно в начале координат будет находиться максимум нулевого порядка ($m = 0$) – это и будет минимальный порядок интерференции. Максимальный же порядок интерференции будет иметь место при $z = \pm z_0$:

$$m_{\max} = \frac{z_0}{\Delta x} = \frac{8d^2 D}{\lambda L(L+D)} = 227.$$

Полное число наблюдаемых полос будет

$$N = 2m_{\max} = 454.$$

Задача 4. Параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ падает под углом $\alpha = 30^\circ$ на систему из двух плоскопараллельных зеркал 1 и 2 (рис.8). Часть светового пучка отражается от полупрозрачного зеркала 1, а оставшаяся часть полностью отражается от неподвижного зеркала 2. Система волн, отраженных от обоих зеркал, с помощью собирающей линзы фокусируется на приемник П, который расположен в фокальной плоскости линзы. Сигнал приемника пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала приемника в случае плоскопараллельного перемещения зеркала 1 со скоростью $u = 0,01 \text{ см/с}$?

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть координата зеркала 1

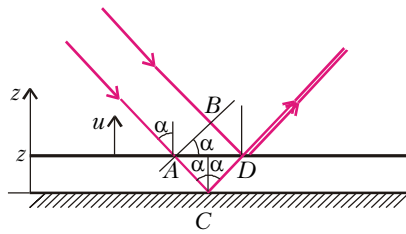


Рис. 9

относительно зеркала 2 равна z (рис.9). Найдем в этот момент оптическую разность хода Δ между двумя волнами, одна из которых – отраженная от зеркала 1, а другая – отраженная от зеркала 2 и прошедшая зеркало 1. Прямая AB является волновым фронтом (линией постоянной фазы) падающей волны в некоторый произвольный момент времени. Расстояние этого фронта до точки D, где произойдет отражение, равно отрезку BD, а расстояние, которое нужно пройти этому фронту до точки D после отражения от зеркала 2, равно сумме длин отрезков AC и CD. Очевидно, что оптическая разность хода между волнами равна

$$\Delta = AC + CD - BD.$$

Из рисунка 9 находим

$$AC = CD = \frac{z}{\cos \alpha},$$

$$BD = AD \sin \alpha = 2z \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = \frac{2z \sin^2 \alpha}{\cos \alpha},$$

откуда

$$\Delta = \frac{2z}{\cos \alpha} - \frac{2z \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2z \cos \alpha.$$

Приемник будет регистрировать максимальный сигнал, когда

$$2z \cos \alpha = m\lambda, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Между двумя соседними максимумами сигнала зеркало 1 пройдет расстояние

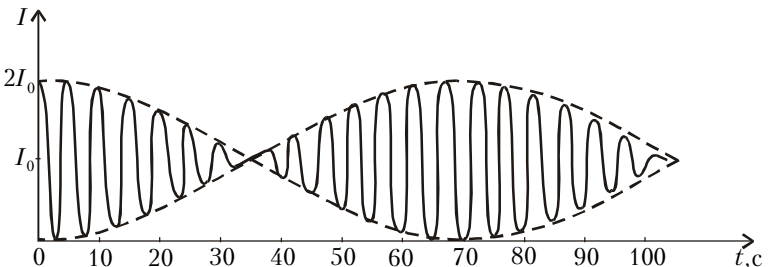


Рис. 11

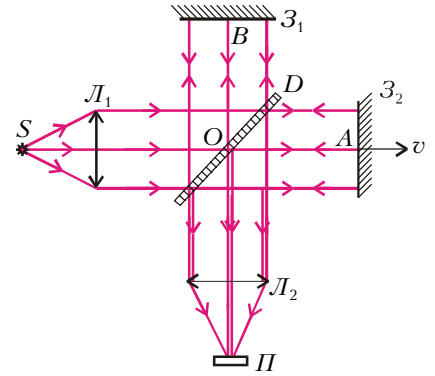


Рис. 10

яние $\delta z = \lambda/(2 \cos \alpha)$. Время прохождения зеркалом 1 этого расстояния, или период переменного сигнала приемника, будет

$$T = \frac{\delta z}{u} = \frac{\lambda}{2u \cos \alpha},$$

а частота сигнала –

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2u \cos \alpha}{\lambda} = 346 \text{ Гц.}$$

Задача 5*. Для исследования спектрального состава излучения источника используется интерферометр Майкельсона (рис.10). Точечный источник S расположен в фокальной плоскости линзы L_1 . Слаборасходящийся пучок света разделяется делителем D на два одинаковых по интенсивности пучка. Один из них (отраженный от делителя) направляется на неподвижное зеркало Z_1 , а второй после прохода делителя идет к зеркалу Z_2 , которое перемещается со скоростью $v = 6 \cdot 10^{-5} \text{ мм/с}$. После отражения от зеркал и последующего взаимодействия с делителем образуются два когерентных пучка, которые с помощью линзы L_2 собираются на фотоприемник П. Ток фотоприемника пропорционален интенсивности падающего на него излучения. На рисунке 11 показан график изменения фототока приемника, когда излучение источника содержит две близкие спектральные линии одинаковой интенсивности с длинами волн λ_1 и λ_2 ($\lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1$). Определите значения этих длин волн.

Рассмотрим квазимонохроматическое излучение с длиной волны λ_1 . Пусть интенсивность этого излучения равна I_0 . Очевидно, что интенсивность каждого из двух когерентных пучков, фокусируемых линзой L_2 на фотоприемник, равна $I_0/4$. Если в данный момент времени длины плеч интерферометра (расстояния от делителя до зеркал) равны OA и OB , то разность хода между нашими двумя волнами составляет $\delta = 2(OA - OB)$, где множитель «2» учитывает распространение волны к зеркалу и обратно, фазовый сдвиг равен $\Delta\phi = 2\pi\delta/\lambda_1$, суммарная интенсивность этих волн равна

$$I_1(t) = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2 \frac{\sqrt{I_0}}{2} \frac{\sqrt{I_0}}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta\right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta\right)\right).$$

Введем обозначения: $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\bar{\lambda}$, откуда $\lambda_1 = \bar{\lambda} - \Delta\lambda/2$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} + \Delta\lambda/2$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина волны. После подстановки выражения для λ_1 суммарная интенсивность $I_1(t)$ будет

$$I_1(t) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda} - \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} + \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) \pm \frac{I_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right) \sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Аналогично, для излучения с длиной волны λ_2 получим

$$I_2(t) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda} + \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} \pm \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) + \frac{I_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right) \sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Суммарная интенсивность света на приемнике от излучений с обеими длинами волн будет

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = I_0 + I_0 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Первый переменный множитель во

втором члене этого выражения описывает высокочастотное периодическое колебание фототока, а второй множитель соответствует низкочастотной огибающей. По графику зависимости $I(t)$ находим, что период высокочастотных колебаний равен $T = 5$ с. За это время разность хода δ изменяется на $\bar{\lambda}$, что соответствует перемещению подвижного зеркала на $\bar{\lambda}/2$. Расстояние, пройденное зеркалом за время T , очевидно, равно Tv . Таким образом, $\frac{\bar{\lambda}}{2} = Tv$, откуда

$$\bar{\lambda} = 2Tv = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 600 \text{ нм}.$$

Как мы уже отмечали, функция $\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)$ описывает огибающую высокочастотного сигнала. Из рисунка 11 можно найти, что за время, равное $14T$, фаза изменяется на π , а разность хода – на $\bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$. Подвижное зеркало проходит за это время в два раза меньшее расстояние. Итак,

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} = 14Tv, \text{ откуда}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\bar{\lambda}^2}{28Tv} \approx 43 \text{ нм}.$$

Таким образом, длины волн спектральных линий равны, соответственно,

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2} = 578,5 \text{ нм},$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2} = 621,5 \text{ нм}.$$

Задача 6. На физической олимпиаде, проходившей в Московском физико-техническом институте в 1998 году, школьникам была предложена такая экспериментальная задача: с помощью штангенциркуля измерить длину волны лазерного излучения. В качестве лазера использовался миниатюрный твердотельный квантовый генератор. Один из участников олимпиады собрал экспериментальную установку, изображенную на рисунке 12. На горизонтальной поверхнос-

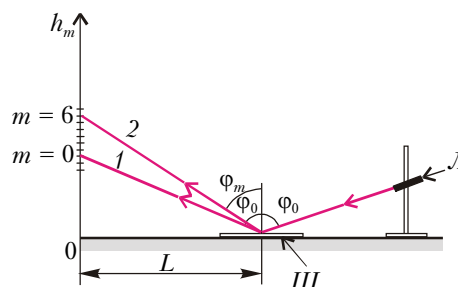


Рис. 12

ти стола, примыкающего к вертикальной стене комнаты, лежит штангенциркуль III. Излучение лазера Л, укрепленного на штативе, падает поперек миллиметровым рискам штангенциркуля. На миллиметровой бумаге, закрепленной на стене, наблюдается система дифракционных максимумов в виде светлых горизонтальных линий. Были проведены три замера: высота самой яркой линии (луч 1) $h_0 = 31$ мм, высота шестого дифракционного максимума (луч 2) $h_6 = 68$ мм и расстояние $L = 695$ мм. По этим данным определите длину волны лазерного излучения.

Идея решения задачи понятна: использовать штангенциркуль с нанесенными на нем миллиметровыми рисками в качестве отражательной дифракционной решетки. Диаметр светового пучка лазера на расстоянии 1 м составляет ~ 4 мм, поэтому для увеличения числа рисок, освещаемых падающим пучком света, угол падения ϕ_0 должен быть близок к $\pi/2$.

Рассмотрим ход лучей, рассеянных на двух соседних рисках (рис.13). Расстояние между соседними штрихами (постоянная решетки) $d = 1$ мм. Обозначим угол падения лучей 1 и 2 через ϕ_0 , а угол отражения лучей 1' и 2' – через ϕ_m , и пусть угол ϕ_m соответствует направлению на m -й дифракционный максимум. Разность хода лучей 1, 1' и 2, 2' равна

$$\Delta = d \sin \phi_0 - d \sin \phi_m.$$

Если угол ϕ_m соответствует направлению на m -й главный дифракционный максимум, то $\Delta = m\lambda$, где λ – длина волны света. Таким образом,

$$d \sin \phi_0 - d \sin \phi_m = m\lambda,$$

$$\text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, что направление на максимум нулевого порядка ($m = 0$) имеет место при $\phi_m = \phi_0$, т.е. когда происходит зеркальное отражение. Если высота расположения максимума h_0 , то

$$\sin \phi_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_0^2}}.$$

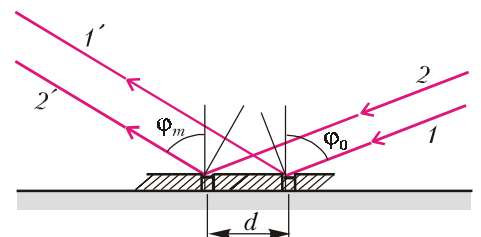


Рис. 13

Для высоты расположения максимума шестого порядка ($m = 6$)

$$\sin \varphi_6 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_6^2}}.$$

Условие направления на главные дифракционные максимумы позволяет определить длину волны света:

$$\lambda = \frac{dL}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + h_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + h_6^2}} \right).$$

Поскольку h_0 и h_6 много меньше L , можно записать

$$\lambda \approx \frac{d(h_6 - h_0)(h_6 + h_0)}{12L^2} = 632 \text{ нм}.$$

С учетом погрешностей измерений окончательно получим

$$\lambda = (630 \pm 50) \text{ нм}.$$

Упражнения

1. Из линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см вырезана центральная часть шириной a , как показано на рисунке 14. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. С противоположной стороны линзы находится экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседни-

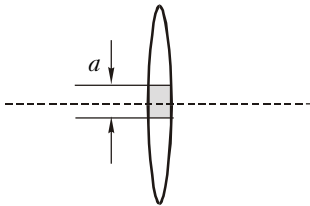


Рис. 14

ми светлыми полосами равно $\Delta x = 0,5$ мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найдите a .

2. В интерференционной схеме, изображенной на рисунке 15, на бипризму Френеля падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. При каком расстоянии L между биприз-

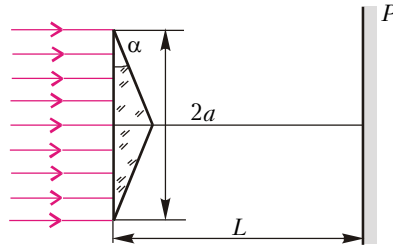


Рис. 15

мой и экраном P на нем будет наблюдаться интерференционная картина максимального размера? Чему будет при этом равна ширина интерференционных полос? Какое количество светлых полос будет наблюдаться на экране в этом случае? Расстояние между вершинами бипризмы $2a = 5$ см, показатель преломления материала бипризмы $n = 1,5$, преломляющий угол $\alpha = 10^{-3}$ рад. Считать, что $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha$.

3. Интерферометр Рэлея (рис. 16) используется для относительного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей располагается кювета Γ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого луча — компенсатор K , с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между лучами равнялась нулю. Чему равно относительное изменение показателя прелом-

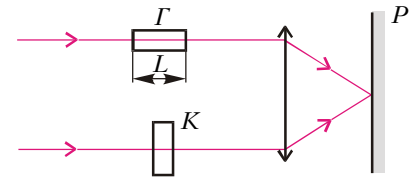


Рис. 16

ления азота, по отношению к воздуху, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина в плоскости наблюдения P сместилась ровно на одну полосу? Измерения проводились на длине волны $\lambda = 500$ нм.

4. Точечный источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдяной пластинки толщиной $h = 0,1$ мм с показателем преломления $n = 1,4$ (рис. 17). На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран $\mathcal{E}$, ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $\varphi = 60^\circ$. Найдите порядок m

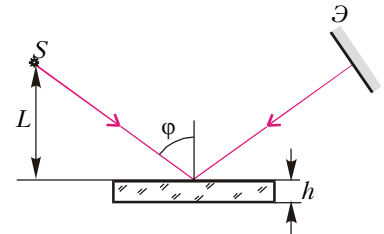


Рис. 17

интерференционной полосы в центре экрана. Определите ширину интерференционных полос. Длина волны света $\lambda = 560$ нм.

Задачи о трапециях

**В. АЛЕКСЕЕВ, В. ГАЛКИН,
В. ПАНФЕРОВ, В. ТАРАСОВ**

СРЕДИ ЗАДАЧ О МНОГОУГОЛЬНИКАХ на вступительных экзаменах в вузы важную долю составляют задачи о трапециях.

Здесь мы обсудим основные подходы к решению таких задач.

Подобие и пропорциональность в трапециях

Важной особенностью трапеций является наличие двух параллельных сторон. При пересечении их (или их

продолжений) любой прямой образуются равные углы, что приводит к появлению пар подобных треугольников и, соответственно, пропорциональных отрезков. Также (в соответствии с теоремой Фалеса) пропорциональные отрезки возникают на боковых сторонах трапеции или их продолжениях, если проводится прямая, параллельная основаниям. Следующие задачи показывают, как использовать эти пропорциональности.

Задача 1. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает ее боковые стороны и диагонали последовательно в точках M , P , Q , N (рис. 1). Докажите, что $MP = QN$.

Решение (обозначения см. на рис.

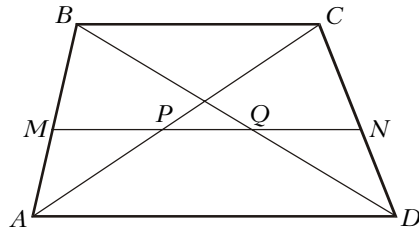


Рис. 1

1). Так как $MN \parallel BC$, то $\triangle AMP \sim \triangle ABC$, $\triangle DQN \sim \triangle DBC$ и $AM : AB = DN : DC$. Поэтому $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC}$. Отсюда $MP = QN$.

Задача 2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Эта прямая пересекает боковые стороны в точках M и N . Найдите длину отрезка MN .

Решение (см. рис.2). Так же, как в задаче 1, получаем, что $MO = ON$. Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle OBC \sim \triangle ODA$ (из

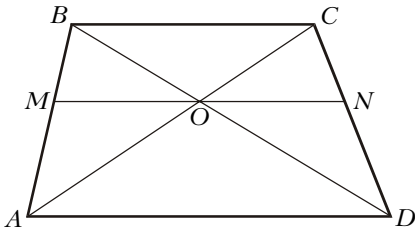


Рис. 2

равенства углов). Отсюда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}$ и $\frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$. Так как $MN \parallel AD$, то $\triangle BMO \sim \triangle BAD$. Поэтому $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$ и $MO = \frac{b}{a+b} AD = \frac{ab}{a+b}$. Поскольку $MO = ON$, то $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Следующая задача выражает очень важное утверждение о трапециях.

Задача 3. Докажите, что середины оснований, точка O пересечения диагоналей и точка F пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

Решение. Пусть прямая FO пересекает основания трапеции в точках M и N (рис.3). Так как $\triangle FBM \sim \triangle FAN$, $\triangle FMC \sim \triangle FND$, $\triangle OBM \sim \triangle ODN$, $\triangle OMC \sim \triangle ONA$, то $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN} =$

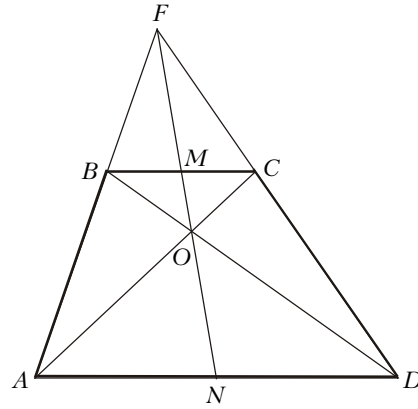


Рис. 3

$\frac{MC}{ND}$ и $\frac{BM}{ND} = \frac{MO}{ON} = \frac{MC}{AN}$. Отсюда $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ и $\frac{BM}{MC} = \frac{ND}{AN}$. Тогда $\frac{AN}{ND} = \frac{ND}{AN}$, и $AN = ND$. Но тогда и $BM = MC$.

Дополнительные построения в трапециях

Обычно трудности у школьников вызывает выбор тех дополнительных построений, которые помогают решить задачу. Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений. Отметим те, которые наиболее часто используются при решении задач: 1) опускание высот из концов одного основания на другое основание; 2) проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину; 3) проведение через середину меньшего основания прямой, параллельных боковым сторонам; 4) проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину; 5) продолжение боковых сторон до пересечения.

Дополнительное построение 1) позволяет разбить трапецию на прямоугольник (стороны которого — одно из оснований и высота трапеции) и 2 прямоугольных треугольника (в которых один из катетов — высота трапеции, а гипотенузы — боковые стороны трапеции). Это часто позволяет произвести нужные вычисления.

Дополнительное построение 2) порождает параллелограмм и треугольник. Это построение полезно, когда в образовавшемся треугольнике удастся получить 3 параметра.

Задача 4. Постройте трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) по четырем сторонам $AB = c$, $AD = b$, $BC = a$, $CD = d$ ($a < b$) и найдите ее высоту.

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

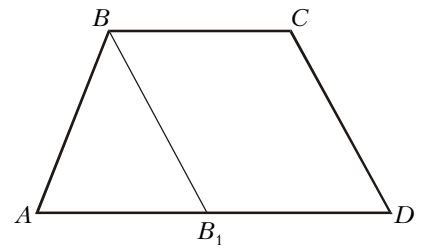


Рис. 4

$BB_1 \parallel CD$ (рис.4). Получим треугольник ABB_1 с известными сторонами $AB = c$, $BB_1 = CD = d$, $AB_1 = b - a$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ABB_1 , на луче AB_1 отложить отрезок $AD = b$, через точку B провести прямую, параллельную AD , и отложить на ней отрезок $BC = a$ (в нужную сторону). Высота h трапеции находится, например, из формулы $S = \frac{h(b-a)}{2}$ для

площади треугольника ABB_1 , где площадь треугольника предварительно вычисляется по формуле Герона.

Ответ:

$$h = \frac{2}{b-a} \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-b+a)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(c+d+b-a).$$

Указанное построение заставляет «работать» боковые стороны, соединив их вместе в треугольнике ABB_1 . Дополнительное построение 3) очень близко к 2) и порождает такой же треугольник.

Задача 5. В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90° . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна d .

Решение. Пусть в данной трапеции основания AD и BC ($AD > BC$) и пусть

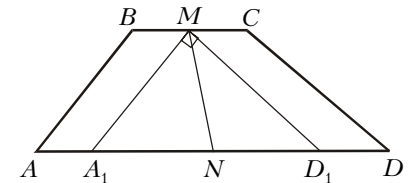


Рис. 5

M — середина стороны BC , N — середина стороны AD . Требуется найти длину MN (рис.5). Проведем из точки M прямые параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием AD в точках A_1 и D_1 . Тогда сумма углов MA_1D_1 и MD_1A_1 равна 90° , т.е. треугольник MA_1D_1 является прямоугольным. Имеем $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, поэтому $AA_1 = D_1D$ и $A_1N = ND_1$. Таким образом, MN — медиана

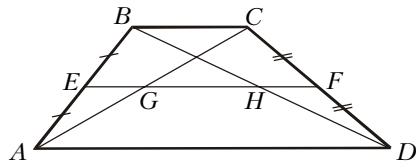


Рис. 6

в прямоугольном треугольнике MA_1D_1 , которая, как известно, равна половине гипотенузы A_1D_1 . Поскольку $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, то $A_1D_1 = AD - BC$ и $MN = \frac{A_1D_1}{2} = \frac{AD - BC}{2}$. С другой стороны, пусть EF — средняя линия трапеции (E на AB), и пусть она пересекает диагонали AC и BD в точках G и H (рис. 6). Тогда EF параллельна основаниям и поэтому EH — средняя линия в треугольнике ABD , а EG — средняя линия в треугольнике ABC . Поэтому $GH = EH - EG = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$. В результате получаем $MN = GH = d$.

Ответ: d .

В тех случаях, когда заданы диагонали трапеции или угол между ними, бывает полезно дополнительное построение 4), порождающее треугольник, в котором 2 стороны равны и параллельны диагоналям трапеции, а длина третьей стороны равна сумме длин оснований трапеции.

Задача 6. Постройте трапецию $ABCD$ ($DC \parallel AB$) по двум ее основаниям $DC = a$, $AB = b$ ($a < b$) и двум диагоналям $AC = d_1$, $BD = d_2$.

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

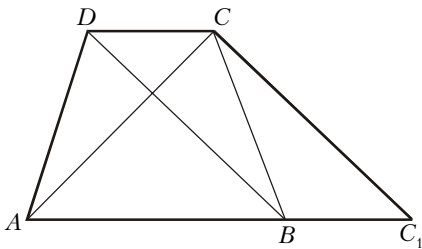


Рис. 7

$CC_1 \parallel DB$ (рис. 7). Получим треугольник ACC_1 с известными сторонами $AC = d_1$, $CC_1 = d_2$, $AC_1 = a + b$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ACC_1 , на AC_1 отложить отрезок $AB = b$, через точку C провести прямую, параллельную AB , и отложить на ней отрезок $DC = a$ (в нужную сторону).

Указанное дополнительное построение заставляет «работать» обе диагонали, соединив их вместе в треугольнике ACC_1 .

Дополнительное построение 5) по-

зволяет сводить задачу о трапеции к задаче о треугольниках.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1999 г.). В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K , причем точка K лежит на основании AD .

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB , а прямая MK — сторону BC ?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

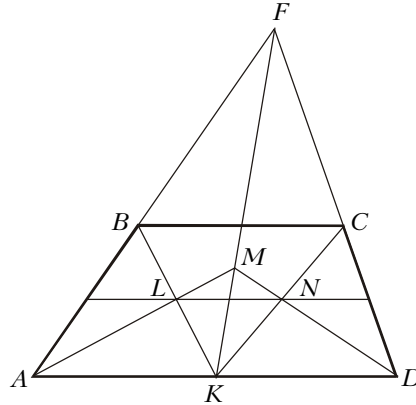


Рис. 8

Решение (см. рис. 8). Так как сумма углов трапеции при боковой стороне AB равна 180° и AM и BK — биссектрисы этих углов, то $\angle LAB + \angle LBA = 90^\circ$. Таким образом, в треугольнике ABK биссектриса AL является высотой. Поэтому $AK = KB = 9$. Аналогично, $KD = CD = 5$. При этом $BL = LK$, $CN = NK$, поэтому LN — средняя линия в треугольнике KBC , а ее продолжение — средняя линия в треугольнике ABK . Значит, LN делит AB в отношении $1 : 1$. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке F . Тогда M — точка пересечения биссектрис в треугольнике AFD и FM — третья биссектриса в этом треугольнике. Пусть продолжение FM пересекает AD в точке K_1 . Тогда по теореме

$$\text{о биссектрисе } \frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{5}.$$

Отсюда следует, что K_1 совпадает с K , т.е. FK проходит через M . При этом легко получить, что прямая MK (или FK) делит сторону BC в том же отношении, что и сторону AD , т.е. $9 : 5$. Так как $\angle KLM = \angle KNM = 90^\circ$, то точки K, L, M, N лежат на одной окружности (с диаметром MK). Тогда $\angle MKN = \angle MLN$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Но $LN \parallel BC$, поэтому $\angle MLN = \angle MAK$. Таким об-

разом, $\angle MKN = \angle MAK$ и $\triangle NKM \sim \triangle LAK$ (так как $\angle MNK = \angle ALK = 90^\circ$). Аналогично, $\triangle LKM \sim \triangle NDK$. Поэтому $\frac{MK}{AK} = \frac{MN}{LK}$ и $\frac{MK}{KD} = \frac{ML}{KN} = \frac{3}{7}$. Отсюда $MK = \frac{3}{7}KD = \frac{15}{7}$ и $\frac{MN}{LK} = \frac{15}{7} : 9 = \frac{5}{21}$.

Ответ: а) $1 : 1$, $9 : 5$; б) $5 : 21$.

Трапеции и площадь

Наличие параллельных сторон в трапеции порождает ряд интересных свойств, связанных с площадями.

Задача 8. Диагонали трапеции пересекают ее на 4 треугольника. а) Докажите, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам, имеют равную площадь. б) Пусть площади треугольников, примыкающих к основаниям, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

Решение (см. рис. 9). а) Так как $BC \parallel AD$, то высоты в треугольниках ABD и ACD , опущенные на их общее

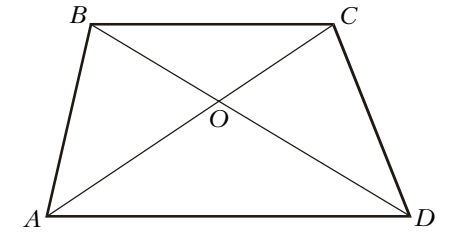


Рис. 9

основание AD , равны. Поэтому равны площади треугольников ABD и ACD . Так как эти треугольники имеют общую часть AOD , то равны также площади треугольников ABO и CDO .

б) Пусть площади треугольников ABO и CDO равны S_3 и S_4 . Тогда $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ (докажете, что это равенство справедливо в любом выпуклом четырехугольнике, воспользовавшись тем, что $\sin \angle AOB = \sin \angle BOC = \sin \angle COD = \sin \angle DOA$). В п. а) мы доказали, что $S_3 = S_4$. Поэтому $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 S_2}$. Отсюда площадь трапеции равна $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Имеется ряд важных связей площадей с дополнительными построениями в трапеции. Так, например, при продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.

Задача 9. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям. При этом площадь трапеции $MBCN$ в k раз больше площади трапеции $AMND$. Найдите длину MN , если $BC = a$ и $AD = b$.

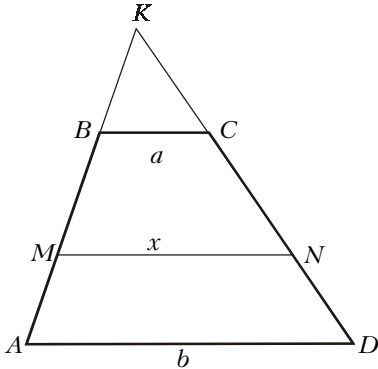


Рис. 10

Решение (см. рис. 10). Пусть длина отрезка $MN = x$ и пусть $a < b$. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке K . Получим три подобных треугольника KBC , KMN и KAD с основаниями a , x , b . Для площадей этих подобных треугольников имеем $S_{KBC} : S_{KMN} : S_{KAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{BCNM} = S_{KMN} - S_{KBC}$ и $S_{AMND} = S_{KAD} - S_{KMN}$, то $S_{BCNM} : S_{AMND} = (x^2 - a^2) : (b^2 - x^2)$. Из условия получаем, что $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = k$, откуда $x^2 = \frac{a^2 + kb^2}{1+k}$ и $x = \sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$. Тот же результат получается и при $a > b$. (При $k = 1$ получаем, что длина отрезка MN , параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.)

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$.

При дополнительном построении 4), когда переносится диагональ, образуется треугольник, площадь которого равна площади трапеции. Это дополнительное построение оказывается ключевым, например, в следующей задаче.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1999 г.). В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

Решение. В трапеции даны диагонали. Чтобы заставить их «работать», сделаем стандартное построение – про-

ведем $CC_1 \parallel DB$ (см. рис. 7). Получим треугольник ACC_1 , который равен трапеции. Действительно, треугольники ADC и CC_1B имеют одинаковое основание ($DC = BC_1$, так как DCC_1B – параллелограмм) и одинаковую высоту, равную высоте трапеции. Поэтому их площади равны, а значит, равны и площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACC_1 . В треугольнике ACC_1 известны две стороны $AC = a$, $CC_1 = BD = \frac{7}{5}a$ и соотношение между углами. Действительно, если $\angle CC_1A = \angle DBA = \alpha$, то по условию $\angle CAC_1 = 2\alpha$, значит, $\angle ACC_1 = 180^\circ - 3\alpha$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$. Откуда $2 \cos \alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{7}{5}$ и $\cos \alpha = \frac{7}{10}$. Тогда $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (синус положителен, так как $\alpha \in (0; 180^\circ)$). Для угла ACC_1 имеем $\sin \angle ACC_1 = \sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}$.

Осталось вычислить площадь:

$$S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CC_1 \cdot \sin \angle ACC_1 = \frac{42\sqrt{51}a^2}{625}.$$

Ответ: $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$.

Трапеции и окружности

Если окружность описана около трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), это означает, что трапеция – равнобокая (это следует из равенства вписанных углов $\angle CAD$ и $\angle ACB$). При этом прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно основаниям, является осью симметрии трапеции, что обычно можно активно использовать при решении задач. При вычислениях часто удобно использовать теорему синусов, поскольку окружность, описанная около трапеции, описана и около четырех треугольников, вершины которых совпадают с вершинами трапеции. Иногда полезно (как в следующей задаче) связать возникающие вписанные углы с центральными.

Задача 11. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана в окружность с центром O . Докажите, что точки A , B , O и точка M пересечения диагоналей трапеции лежат на одной окружности.

Решение. Так как центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол $\angle ADB$ опираются на одну дугу, то $\angle AOB = 2\angle ADB$. Поскольку трапеция равнобокая, то $\angle MAD = \angle MDA$ и $\angle AMB = \angle MAD + \angle MDA = 2\angle ADB = \angle AOB$. Отсюда следует, что окружность, проходящая через A , B , O , проходит также и через M .

Если трапеция $ABCD$ описана около окружности, то у нее также имеется ряд хороших свойств: высота равна диаметру окружности; отрезки сторон от вершин до точек касания попарно равны; $AB + CD = AC + BD$ (как и в любом четырехугольнике, описанном около окружности). Другие интересные свойства содержатся в следующей задаче.

Задача 12. Пусть трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана около окружности с центром O . Докажите, что а) средняя линия трапеции равна полусумме ее боковых сторон; б) боковые стороны видны из центра O под прямым углом (т.е. $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$); в) $AM \cdot MB = CN \cdot ND = r^2$, где M и N – точки касания окружности со сторонами AB и CD соответственно и r – радиус окружности.

Решение. Утверждение а) следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований и $AB + CD = AC + BD$.

б) Точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Поэтому AO , BO , CO , DO – биссектрисы углов A , B , C , D . Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, то $\angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$ и $\angle AOB = 90^\circ$. Аналогично, $\angle COD = 90^\circ$.

в) Так как треугольник AOB – прямоугольный и OM – высота в нем, то $AM \cdot MB = OM^2 = r^2$ (по теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике). Аналогично, $CN \cdot ND = ON^2 = r^2$.

Если в задаче имеется трапеция и некоторая окружность, то часто бывает полезно использовать тот факт, что и в трапеции и в окружности возникают равные углы.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1994 г.). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E , пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A , D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF .

Решение (см. рис. 11). Угол $\angle CEF$ заключен между хордой EC и касательной EF . Как известно, он равен половине дуги EC , т.е. вписанному

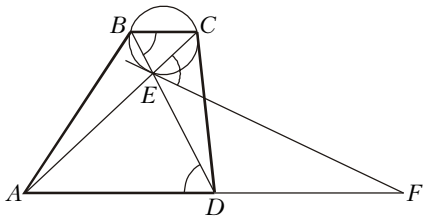


Рис. 11

углу CBE . С другой стороны, в трапеции $\angle CBD = \angle BDA$. Поэтому $\angle CEF = \angle BDA$, откуда $\angle AEF = \angle EDF$. Отсюда следует, что $\triangle FAE \sim \triangle FED$ (у них еще общий угол DFE). Тогда $\frac{EF}{FD} = \frac{AF}{EF}$, и $EF^2 = a(a-b)$. Окончательно, $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

Ответ: $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

В ряде задач окружность отсутствует в формулировке, но полезна при решении. Важно бывает увидеть саму возможность провести вспомогательную окружность, чтобы получить ключ к решению всей задачи. Эффективность метода вспомогательной окружности подтверждает следующая задача, где оказывается удобным провести сразу две вспомогательные окружности.

Задача 14 (МГУ, физический факультет, 1997 г.). В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Прямая, перпендикулярная стороне CD , пересекает сторону AB в точке M , а сторону CD — в точке N . Известно, что $MC = a$, $NB = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c . Найдите расстояние от точки A до прямой BN .

Решение. В задаче присутствуют многочисленные перпендикуляры и прямые углы: $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, так как трапеция прямоугольная (рис. 12); $MN \perp CD$; $DD_1 \perp MC$ и $DD_1 = c$; $AA_1 \perp BN$ и $AA_1 = x$ — искомая величина; $MC = a$, $NB = b$. Имеем: отрезок MC виден из точек B и N под прямым углом. Поэтому около четырехуголь-

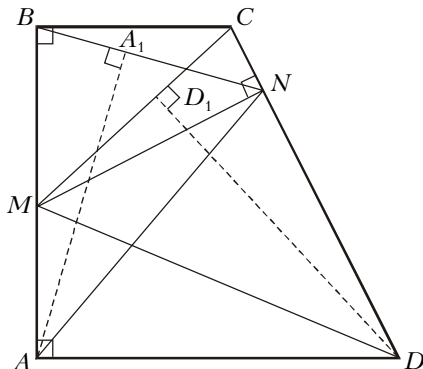


Рис. 12

ника $BCNM$ можно описать окружность S_1 . Диаметр ее известен — это отрезок $MC = a$. Из точек B и C окружности ее хорда MN видна под одним углом α (по следствию из теоремы о вписанном угле), т.е. $\angle MBN = \angle MCN = \alpha$.

Отрезок MD виден из точек N и A также под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $AMND$ тоже можно описать окружность. Диаметр ее является отрезок MD . Из точек A и D общая хорда двух окружностей (хорда MN) видна под одним углом β : $\angle MAN = \angle MDN = \beta$. В результате имеем два подобных треугольника BAN и CDM (по двум углам).

Значит, $\frac{BN}{MC} = \frac{AA_1}{DD_1}$, откуда $AA_1 = x = \frac{BN \cdot DD_1}{MC} = \frac{bc}{a}$.

Ответ: $\frac{bc}{a}$.

Упражнения

1 (МГУ, факультет почвоведения, 1993 г.). Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F . Длина отрезка EF равна 2. Определите длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b .

3. Точка K лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $AK = \frac{1}{n} AD$. Найдите отношение $AM : MD$, где M — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точки пересечения прямых AB и CD и прямых BK и AC . Используя решение этой задачи, предложите способ деления данного отрезка на n равных частей ($n = 1, 2, 3, \dots$) с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

4. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Известно, что $BO = PD$. Найдите отношение $AD : BC$.

5. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины 20° и 70° , а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

6. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные

прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна 10. Найдите площадь пятиугольника.

7 (МГУ, биологический факультет, 1991 г.). Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны 8 и 6 соответственно. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC .

8 (МГУ, химический факультет, 1995 г.). Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

9 (МГУ, психологический факультет, 1990 г.). В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60° . Отношение площадей треугольников AOD и BOC , где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

10 (МГУ, физический факультет, 1996 г.). В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d . Найдите площадь трапеции.

11 (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b ($a > b$)?

12 (МГУ, мехмат, 1995 г.). На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M , что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N , что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

13 (МГУ, физический факультет, 1995 г.). Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в окружность. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите радиус окружности.

14. Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Окружность касается основания трапеции AD в точке P , а боковых сторон AB и CD — в точках M и K соответственно, при этом $MK = 20$. Найдите длину отрезка, который отсекают прямые PB и PC из отрезка MK .

15. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, которая касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции, если $AM = a$, $MB = b$, $CN = c$.