



№ 1, 2001 г. / Практикум абитуриента

А. Овчинников, В. Плис

Законы сохранения в задачах на столкновения

© “Квант”

Использование и распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции



Сетевая образовательная библиотека “VIVOS VOCO!”
(грант РФФИ 00-07-90172)

vivovoco.nns.ru
vivovoco.rsl.ru
www.ibmh.msk.su/vivovoco

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Законы сохранения в задачах на столкновения

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС

В ФИЗИКЕ ПОД СТОЛКНОВЕНИЯМИ понимают процессы кратковременного взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не только как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – соединение тел, возникновение новых тел и т.п. Наконец, может иметь место *упругое* столкновение, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, приводящие к изменению внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль. В частности, с такими столкновениями приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений.

Обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол $\beta = \arccos(4/15)$, а

величина скорости протона уменьшилась на 10% (рис. 1). Найдите массовое число химического элемента.

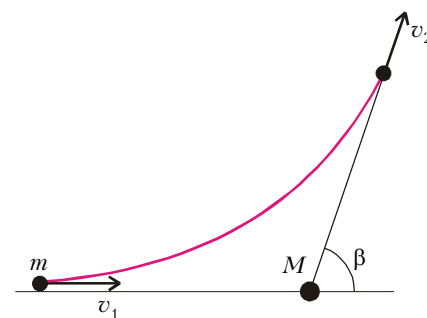


Рис. 1

Взаимодействие частиц упругое; следовательно, импульс и энергия системы сохраняются:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{v},$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

где m , v_1 и v_2 – масса и скорости протона, M и v – масса и скорость неизвестного ядра. Из закона сохранения импульса с помощью теоремы косинусов получаем

$$(Mv)^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 - 2m^2v_1v_2\cos\beta.$$

Из двух последних соотношений по-

лучаем искомое массовое число:

$$A = \frac{M}{m} = \frac{1 + k^2 - 2k \cos \beta}{1 - k^2} = 7,$$

$$\text{где } k = \frac{v_2}{v_1} = 0,9.$$

Следовательно, протон столкнулся с ядром лития.

Задача 2. Каков максимальный угол θ упругого рассеяния α -частицы в водороде? Масса атома водорода в 4 раза меньше массы α -частицы.

Первый способ решения. Проанализируем упругое столкновение в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. Введем обозначения: m_1 – масса α -частицы, $\vec{v}$ – ее скорость до рассеяния, m_2 – масса атома водорода, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости α -частицы и атома водорода, соответственно, после рассеяния.

Взаимодействие упругое; следовательно, сохраняются импульс (рис. 2)

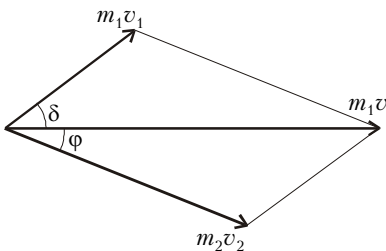


Рис. 2

и кинетическая энергия системы α -частица – атом водорода:

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \delta + m_2 v_2 \cos \phi,$$

$$m_1 v_1 \sin \delta = m_2 v_2 \sin \phi,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Исключив из этих соотношений угол ϕ и скорость v_2 , получим относительно v_1 квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1 v \cos \delta \cdot v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Корни этого уравнения будут вещественными при $\sin \delta \leq m_2/m_1$. Максимальный угол δ , удовлетворяющий этому условию, и есть искомый угол θ . Таким образом,

$$\theta = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \approx 0,25 \text{ рад.}$$

Заметим, что рассеяние на максимальный угол возможно только при условии, что масса налетающей части-

цы больше массы покоящейся.

Второй способ решения. В общем случае столкновение удобно рассматривать в системе центра масс сталкивающихся частиц (в системе, где их суммарный импульс равен нулю). Скорость центра масс нашей системы тел равна

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}.$$

До столкновения импульс частицы массой m_1 равен

$$\vec{p} = m_1 \left(\vec{v} - \vec{V} \right) = \frac{m_1 m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2},$$

а импульс частицы массой m_2 равен $-\vec{p}$.

При упругом столкновении импульс и энергия взаимодействующей системы тел сохраняются. Так что если импульс первой частицы после столкновения обозначить $\vec{p}_*$, то импульс второй будет $-\vec{p}_*$. Из закона сохранения энергии, записанном в виде

$$p^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = p_*^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

находим

$$p = p_*.$$

Таким образом, единственное, что происходит в рассматриваемой системе при столкновении, это поворот импульсов частиц, т.е. изменение их направления без изменения величины. Вместе с импульсами так же изменяются и скорости обеих частиц. Угол поворота зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и от их взаимного расположения при столкновении.

При переходе в лабораторную систему отсчета воспользуемся правилом сложения скоростей. В соответствии с ним, скорость налетающей частицы после столкновения равна

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{1*},$$

где $\vec{v}_{1*}$ – ее скорость в системе центра

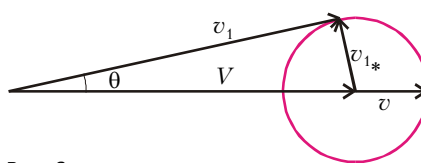


Рис. 3

масс. На рисунке 3 из одной точки отложены векторы $\vec{V}$ – скорость цен-

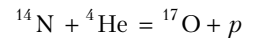
тра масс системы и $\vec{v}$ – скорость налетающей частицы до столкновения. Величина

$$v_{1*} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$

определяет радиус окружности, на которой заканчивается вектор $\vec{v}_1$. Из рисунка следует, что в случае $m_1 > m_2$ угол между векторами скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ налетающей частицы до и после столкновения не может превышать некоторого максимального значения θ , соответствующего случаю, когда $\vec{v}_1$ касается окружности, т.е.

$$\theta = \arcsin \frac{v_{1*}}{V} = \frac{m_2}{m_1} \approx 0,25 \text{ рад.}$$

Задача 3. Первая искусственная ядерная реакция



наблюдалась Резерфордом в 1919 году. Она идет с поглощением энергии $Q = 1,13$ МэВ. Какую минимальную кинетическую энергию $E_{\text{пор}}$ следует сообщить в лабораторной системе отсчета α -частице, чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из азота указанная реакция могла произойти?

Пороговой энергией $E_{\text{пор}}$, или порогом ядерной реакции, называют такую энергию налетающей на неподвижную мишень частицы, начиная с которой ядерная реакция становится возможной.

Сначала – небольшое отступление. Найдем связь кинетических энергий E_k и E_{k*} системы материальных точек в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс соответственно. По закону сложения скоростей, для каждой i -й материальной точки

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i*},$$

где $\vec{V}$ – скорость центра масс системы. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе равна

$$E_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{V} + \vec{v}_{i*})^2}{2} = \sum \frac{m_i \vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i*}^2}{2} + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_{i*}.$$

Сумма $\sum m_i \vec{v}_{i*}$ равна нулю, так как она определяет скорость центра масс в системе центра масс. Таким образом,

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + E_{k*},$$

т.е. кинетическая энергия совокупности материальных точек в лабораторной системе отсчета равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же совокупности материальных точек в ее относительном движении в системе центра масс.

Теперь приступим к решению задачи. Обозначим через $\vec{p}_0$ импульс α -частицы до столкновения. Кинетическая энергия движения центра масс системы

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}}$$

не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Тогда искомую энергию найдем из условия

$$E_{\text{пор}} = Q + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}},$$

откуда

$$E_{\text{пор}} = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} Q = 1,45 \text{ МэВ.}$$

Заметим, что минимум кинетической энергии бомбардирующей частицы достигается в случае, когда продукты реакции покоятся в системе центра масс.

Задача 4. *Неподвижный невозбужденный атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбужденное состояние и начинает двигаться. Найдите величину v скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения фотона. Энергия возбуждения атома водорода $E_{12} = 1,63 \cdot 10^{-18}$ Дж, энергия покоя $mc^2 = 1,49 \cdot 10^{-10}$ Дж.*

Указание. При $x \ll 1$ можно считать, что $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Первый способ решения. Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Из законов сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

и импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

находим искомую скорость:

$$v = c \left(\sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{mc^2}} - 1 \right) \approx c \frac{E_{12}}{mc^2},$$

которая определяется только отношением энергии возбуждения к энергии покоя атома водорода. При выводе учтено, что в числителе стоит величина, на много порядков меньшая, чем в знаменателе. Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении.

Итак, при переходе атома водорода из основного состояния в первое возбужденное состояние атом начинает двигаться со скоростью

$$v \approx c \frac{E_{12}}{mc^2} \approx 3,3 \text{ м/с.}$$

Второй способ решения. При записи законов сохранения энергии и импульса воспользуемся релятивистскими формулами для энергии и импульса:

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Далее, разделим второе соотношение на первое и получим

$$v = c \frac{hc/\lambda}{mc^2 + hc/\lambda}.$$

Энергия поглощаемого фотона много меньше энергии покоя атома, поэтому выражение можно представить в виде

$$v \approx c \frac{hc/\lambda}{mc^2} = c \frac{E_{12}}{mc^2}.$$

Задача 5. *На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова минимальная кинетическая энергия налетающего атома, при которой в результате столкновения может излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода 13,6 эВ.*

Налетающий атом передаст на ионизацию максимально возможную энергию при таком неупругом столкновении, когда оба атома в системе центра масс будут покоиться. Кинетическая энергия движения центра масс системы, равная

$$\frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{p^2}{4m_p} = \frac{E_{\text{пор}}}{2}$$

(где m_p – масса протона, а $E_{\text{пор}}$ – пороговая энергия), не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Фотон унесет минимальную энергию,

если электрон в атоме водорода перейдет с первого уровня на второй. Для этого атом должен поглотить энергию

$$h\nu_{12} = hR \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} hR = \frac{E_{\text{пор}}}{2},$$

где R – постоянная Ридберга. При ионизации электрон переходит с первого уровня на бесконечность; следовательно, энергия ионизации

$$E_{\text{и}} = hR.$$

Из полученных соотношений находим

$$E_{\text{пор}} = \frac{3}{2} E_{\text{и}} = 20,4 \text{ эВ.}$$

Задача 6. *Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в обратном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.*

При энергиях в сотни тысяч электронвольт необходим учет релятивистских эффектов. Законы сохранения энергии и импульса принимают вид

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{hc}{\lambda},$$

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

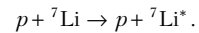
где m – масса электрона, λ_0 и λ – длины волн фотона. Умножим второе равенство на c , сложим его с первым и вычтем его из первого равенства. Перемножив полученные соотношения, найдем

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2 \frac{h}{mc} = 4,84 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Заметим, что это вполне согласуется с экспериментальными данными.

Упражнения

1. Ядро лития возбуждается пучком протонов, падающим на неподвижную литиевую мишень. При этом происходит реакция



При каких отношениях энергии налетающего протона к энергии возбуждения лития возможно возникновение протонов, движущихся в обратном к потоку направлении?

2. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает электрон. Какова минимальная кинетическая энергия $E_{\text{пор}}$ налетающего электрона, при которой в результате столкновения может излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{и}} = 13,6$ эВ.

3. Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в перпендикулярном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.