№ 2, 2001 г.

В. Тихомиров

Математика во второй половине XX века

(окончание; начало см. № 1)

Математика во второй половине XX века

В.ТИХОМИРОВ

13-я проблема Гильберта

Свои открытия в области классической механики А.Н.Колмогоров опубликовал в 1953-54 годах, а уже в следующем году он приступил к осмыслению понятия энтропии и к осаде 13-й проблемы Гильберта.

Эта проблема была посвящена одному из центральных вопросов анализа: *существуют ли функции многих переменных*? В школе изучают, в основном, функции одного переменного: квадратные трехчлены и другие полиномы, тригонометрические функции, экспоненты, логарифмические функции и т.п. Но, разумеется, встречаются и функции двух и большего числа переменных. Скажем, расстояние на плоскости и в пространстве от начала координат: $\sqrt{x^2+y^2}$ и $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – функции двух и трех переменных. Простейшей функцией двух переменных является сумма, сопоставляющая паре чисел (x, y) число $x+y$.

Весь опыт классического анализа свидетельствовал о том, что функции двух переменных устроены несравненно сложнее, чем функции одного переменного, функции трех переменных несопоставимо богаче функций двух переменных и т.д.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

Иллюстрация В.Власова

Как это можно выразить? Одна из возможностей такова. Некоторые функции трех переменных можно задать как суперпозицию функций двух переменных; скажем, так: $f(x, y, z) = \varphi(x, \psi(y, z))$. (Например, функция $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ является суперпозицией функций $u \to u^2$ и $v \to \sqrt{v}$ одного переменного и функции сложения двух переменных.) Уверенный в том, что функции трех переменных не должны сводиться к функциям двух переменных, Гильберт в своей 13-й проблеме придал вопросу наиболее острую форму. Он выбрал одну определенную алгебраическую функцию трех переменных (именно, функцию, являющуюся решением полиномиального уравнения $(x, y, z) \to w^7 + xw^3 + yw^2 + zw + 1 = 0$) и спрашивал: *нельзя ли ее выразить суперпозицией* ***непрерывных*** *функций двух переменных* (полагая, что ответ должен быть отрицательным)? А он оказался положительным.

История решения 13-й проблемы Гильберта чрезвычайно занимательна. Весной 1956 года А.Н.Колмогоров объявил на механико-математическом факультете МГУ спецсеминар для второкурсников, где начал обсуждать некоторые проблемы, имея в виду в отдаленной перспективе приблизиться к решению 13-й проблемы Гильберта. В этом семинаре принял участие второкурсник Дима Арнольд (так друзья называли в студенческие годы Владимира Игоревича). В нем он выполнил свою первую научную работу. Семинар проходил лишь в течение одного семестра, на нем было получено несколько интересных результатов, но проблема Гильберта виделась лишь в бесконечной дали. Однако уже после завершения семинара А.Н.Колмогорову несколько неожиданно даже для самого себя довелось сконцентрировать колоссальный импульс энергии на решении именно этой проблемы. В итоге примерно двухнедельного периода напряженнейших размышлений Колмогоров доказал, что *всякая непрерывная функция четырех переменных является суперпозицией функций трех переменных.* Об этом результате Колмогоров докладывал на III Всесоюзном математическом съезде летом 1956 года. Завершить эти исследования Колмогоров предоставил своим последователям.

Прошло примерно полгода, и както весной 1957 года я оказался у Андрея Николаевича на его даче. Андрей Николаевич показал мне на ученическую тетрадь, на обложке которой было написано: «Курсовая работа студента III курса В.Арнольда». Колмогоров сказал: «Я сейчас проверяю эту работу, но не исключено, что в ней содержится решение 13-й проблемы Гильберта». Так оно и оказалось. Если соединить решения Колмогорова и Арнольда, то получится одно из самых сложных доказательств, когда-либо найденных в математике.

Но на этом история не закончилась. Летом 1957 года Колмогорову удалось усилить результат Арнольда и доказать следующую теорему: *любая непрерывная функция n переменных (заданная на единичном n-мерном кубе) представима в виде суперпозиции функций одного переменного и единственной функции двух переменных – сложения.*

Сформулируем более точно этот результат в применении к функциям двух переменных.

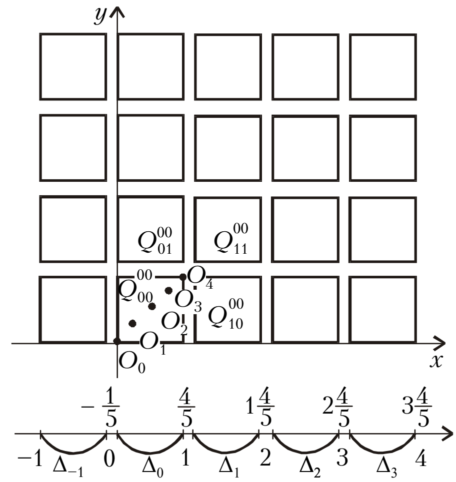
Пусть f – непрерывная функция двух переменных, заданная на единичном квадрате $Q = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$. Тогда она представима в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)),$$

где φ_i, ψ_i *и* χ_i *– непрерывные функции одного переменного.*

Доказательство общей теоремы, относящейся к функциям n переменных, вполне иллюстрируется двумерным случаем. Приведем эскиз доказательства сформулированной выше двумерной теоремы. Оно складывается из трех этапов.

1. Построение системы квадратов. Рассмотрим на прямой систему S_1 единичных отрезков $\{\Delta_i\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$, разделенных интервалами длины $1/5$. Далее на плоскости рассмотрим декартово произведение системы S_1 на самое себя (т.е. совокупность пар (x, y), где $x \in \Delta_i$, $y \in \Delta_j$, $i, j \in \boldsymbol{Z}$). Получили как бы план города с горизонтальными и вертикальными проспектами одинаковой ширины (см. рисунок). Обозначив начало координат буквой O_0, рассмотрим еще точки O_k, $1 \le k \le 4$, с координатами $(k/4, k/4)$. Сдвинем теперь изначальный план города четыре раза так, чтобы начальные точки совпали с точками O_k, $1 \le k \le 4$. И наконец, совершим l раз подряд гомотетии всей картины с коэффициентом гомотетии γ. В итоге получим систему квадратов Q_{ij}^{kl}, $i, j \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le k \le 4$, $l \in \boldsymbol{Z}_+$. Построение системы квадратов закончено.



2. Построение функций φ_k и ψ_k. Эти функции не зависят от приближаемой функции f. Основное требование на эти функции состоит в том, чтобы функции $\Phi_k(x, y) = \varphi_k(x) + \psi_k(y)$ разделяли любые два квадрата из l-й системы квадратов, т.е. чтобы сегменты $\Phi\left(Q_{ij}^{k,l}\right)$ и $\Phi\left(Q_{i'j'}^{k,l}\right)$ при $(i, j) \ne (i', j')$ не пересекались.

Сделаем лишь первый шаг в построении наших функций, которые будем определять на всей плоскости. Мы имеем нулевую систему квадратов Q_{ij}^{00}, состоящую из квадратов со стороной $4/5$, у которой «начальный» квадрат имеет вершиной начало координат. Построим непрерывную функцию $\Phi_i^0(x, y)$, представимую в виде суммы двух функций одного переменного $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$, которая разделяет квадраты Q_{ij}^{00}. Квадрат Q_{ij}^{00} является произведением двух отрезков: Δ_i на оси Ox и Δ_j на оси Oy. Сделаем так, чтобы значения функции $\varphi^0(x)$ на квадрате Q_{ij}^{00} мало отличались от целого числа i, а значения функции $\psi^0(y)$ на том же квадрате мало отличались от числа $\sqrt{2}j$. Иначе говоря, включим точки i в сегменты $[i - \varepsilon_i, i + \varepsilon_i]$, а точки $\sqrt{2}j$ в сегменты $\left[\sqrt{2}j - \eta_j, 2\sqrt{j} + \eta_j\right]$ так, чтобы интервалы $\delta_{ij}^{00} =$

$$= \left[i - \varepsilon_i + \sqrt{2}j - \eta_j,\ i + \varepsilon_i + \sqrt{2}j + \eta_j\right]$$

не пересекались. А далее функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ достроим по линейности. Это и есть первый шаг, за которым индуктивно, но сходным образом, надо последовательно достраивать наши функции.

3. Завершение доказательства (построение функции χ_k). И снова сделаем лишь один шаг индуктивного построения. Пусть на единичном квадрате Q нам задана функция $f(x, y)$, а $M = \max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)|$. Построим функции

χ_k^1 одного переменного так, чтобы для функции $f_1(x,y) = f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} \chi_k^1(\Phi_k(x, y))$ (где $(\Phi_k(x, y))$ – функции, построенные в п.2) было выполнено соотношение $\max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)| \le \frac{5}{6} M$ и при этом $\max_{(x,y)\in Q} |\chi_k(\Phi_k(x,y))| \le \frac{1}{3} M$. Для этого выберем ранг l таким, чтобы разность наибольшего и наименьшего значений функции f на любом квадрате Q_{ij}^{kl} была не больше $\frac{M}{6}$. Положим теперь функцию χ_k на интервале δ_{ij}^{kl} равной одной трети значения, которое принимает функция f в некоторой (все равно какой) точке квадрата Q_{ij}^{kl}. И продолжим функцию χ_k по линейности. Тогда нетрудно показать, что функция f_1 будет удовлетворять нужному условию. А далее наши построения следует повторять.

Этим завершается доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях. Тринадцатой проблеме Гильберта посвящена очень интересная популярная статья В.И.Арнольда «О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных», опубликованная в сборнике «Математическое просвещение» (вып.3, М.: Физмалит, 1958).

Детерминизм и хаос

Скажем еще о третьем направлении, связанном с творчеством Колмогорова пятидесятых годов, – о теории динамических систем и детерминированном хаосе.

Случайные явления изучает теория вероятностей. В этой теории считается, что случайный механизм, предопределяющий статистическую неопределенность, задан априори, и цель – изучать статистику развития процесса и делать прогнозы. Простейшим примером случайного процесса может служить продуцирование последовательностей из нулей и единиц с помощью бросания монеты или шестигранной кости. Совокупность всех таких последовательностей $\xi = (\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ (их называют *бернуллиевскими*) характеризуется тем, что вероятность того, что на n местах $(i_1, \ldots, i_n)$ стоит m единиц, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где p – вероятность выпадения единицы (равная $1/2$ в случае бросания монеты и $1/6$ при бросании кости). Еще в 1713 году Яков Бернулли обнаружил фундаментальный факт, связанный с бернуллиевскими процессами: число выпадений единиц «в среднем» равняется вероятности p появления единицы при бросании. Этот факт называют *законом больших чисел.* Мы уже имели повод сказать, что поведение многих детерминированных процессов напоминает хаотическое движение. Для подобных детерминированных процессов доказываются аналоги теорем типа закона больших чисел. (Скажем, можно ставить вопрос о средней частоте солнечных затмений.)

Новое осмысление явления детерминированного хаоса, отчетливое понимание связи между неустойчивостью динамики и стохастическими свойствами соответствующих динамических систем возникло после появления работы Колмогорова, где было введено понятие энтропии динамической системы.

Среди людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать московских математиков В.М.Алексеева, Д.В.Аносова, Я.Г.Синая. Детерминированному хаосу посвящена статья Я.Г.Синая в «Математическом просвещении» (сер. 3, вып.5, М.: МЦНМО, 2001).

Обобщенные функции

Перейдем к некоторым темам, которые в пятидесятые-шестидесятые годы развивались в школе И.М.Гельфанда.

В начале пятидесятых годов до нас дошли первые слухи о том, что произошло расширение понятия функции: появились *обобщенные* функции. При этом они, в частности, обладали многими чудесными свойствами; например, все оказывались бесконечно дифференцируемыми. Автором нового функционального исчисления был французский ученый Лоран Шварц, опубликовавший в начале 50-х годов свой труд «Теория распределений». (Шварц был удостоен филдсовской медали в 1950 году.)

Еще чуть ли не за 60 лет до того английский физик и инженер Хевисайд ввел своеобразную функцию (которую впоследствии называли δ-функцией). Эта функция обладала невозможными свойствами: она всюду равнялась нулю, кроме одной точки (в которой ее значение равнялось бесконечности), а интеграл от этой функции по всей прямой был равен единице. Хевисайд свободно оперировал с этой функцией (в частности, раскладывал ее в ряд Фурье и т.п.). Математики, конечно, посмеивались над такими причудами. А в тридцатые годы с подобной функцией стал работать великий физик Дирак, но снова полного понимания, что бы это могло значить, у математиков не было.

Новые необычные функции Шварц назвал распределениями, у нас их стали называть обобщенными функциями. Гельфанд писал: «После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность». Теория Шварца сделала возможным придать точный смысл и δ-функции Хевисайда – Дирака.

Вскоре после того, когда до нас дошли первые отголоски теории, построенной Шварцем, выяснилось, что основы по сути дела той же теории были созданы в середине тридцатых годов нашим соотечественником Сергеем Львовичем Соболевым.

Основы теории Соболева – Шварца легче всего объяснить на окружности. Обобщенные функции на окружности T – это *линейные непрерывные функционалы на пространстве бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций.* Линейным функционалом на функциональном векторном пространстве называется такой функционал, который сопоставляет любой функции f из пространства комплексное число $l(f)$ так, что сумме функций сопоставляется сумма соответствующих чисел $(l(f_1 + f_2) = l(f_1) + l(f_2))$ и произведению af функции f на число a сопоставляется число $al(f)$. Пространство бесконечно дифференцируемых функций называют пространством *основных функций.*

Для того чтобы говорить о непрерывности, надо определить понятие сходимости в пространстве основных функций. Говорят, что последовательность f_n основных функций сходится к основной функции f, если для любого k функции $f_n^{(k)}$ сходятся к $f^{(k)}$ равномерно. Функционал l на пространстве основных функций называется *непрерывным*, если из сходимости f_n к f следует сходимость $l(f_n)$ к $l(f)$. Так вот, совокупность всех непрерывных линейных функционалов на пространстве основных функций и есть пространство обобщенных функций. При этом «обычные» функции вкладываются в совокупность обобщенных функций, ибо каждая такая функция g порождает линейный функционал $l(f) = \int_T f(x)\overline{g}(x)dx$. А δ-функция Хевисайда – Дирака – это не что иное, как функционал, сопоставляющий основной функции ее значение в некоторой точке.

И пространство основных функций, и пространство обобщенных функций на окружности допускают другое (двойственное) описание – через ряды Фурье. Каждая бесконечно дифференцируемая функция f разлагается в ряд Фурье $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ikx}$. При этом коэффициенты Фурье убывают «быстрее любой степени» (это значит, что для любого целого числа m найдется константа C_m такая, что $\left|f_k\right| \le C_m / |k|^m$). А обобщенные функции – это формальные ряды $l(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k e^{ikx}$, где l_k растут «не быстрее некоторой степени» (т.е. существуют такие числа N и C, что $\left|l_k\right| \le C|k|^N$). Каждый такой ряд порождает функционал $l(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k \overline{f_k}$. В частности, функционалу, соответствующему δ-функции в нуле, соответствует формальный ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$. Именно его и выписывал еще в XIX веке Хевисайд.

В 1958 году Гельфанд со своими учениками и коллегами осуществил издание серии монографий «Обобщенные функции», явившейся одним из самых замечательных произведений математической литературы прошлого (XX) века. Первые три тома серии были написаны И.М.Гельфандом и Г.Е.Шиловым. Они были посвящены общим проблемам теории обобщенных функций и теории дифференциальных уравнений.

Обобщенные функции оказались исключительно удачным аппаратом для теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными. Результаты, относящиеся к теории дифференциальных уравнений (особенно линейных), сыпались в пятидесятые-шестидесятые годы, как из рога изобилия. Здесь, помимо исследований Гельфанда и Шилова, надо назвать замечательный цикл работ шведского математика Хермандера, удостоенный филдсовской медали в 1962 году.

Преобразование Радона, интегральная геометрия и томография

В 1917 году австрийский математик И.Радон получил формулу обращения для отображения, сопоставляющего функции f на плоскости функцию $\hat{f}$ на множестве всех прямых на плоскости, равную интегралам от f вдоль всех прямых.

Это открытие имело большие последствия как в самой математике, так и в ее приложениях. Наиболее важным – вне всякого сомнения – оказалось приложение преобразования Радона к медицине, приведшее к рождению *томографии* – методу исследования скрытых в организме образований (опухолей, внутренних кровоизлияний и т.п.), заключающемуся в получении послойного изображения объекта при его облучении. Информация об объекте (мозге, печени, почки и т.п. восстанавливается (с помощью компьютера) по вычислению пространственного распределния интенсивности излучения, прошедшего через объект, с помощью преобразования Радона. Томография, безусловно, одно из величайших технических завоеваний второй половины предыдущего века.

Преобразование Радона оказалось путеводной звездой для исследований И.М.Гельфанда. Одной из великих задач, которые решались в XX веке, является задача о создании аналога ряда Фурье (гармонического анализа) для обобщений окружности – для многообразий, на которых действует группа преобразований (типа сферы, плоскости Лобачевского и т.п.). Аналог рядов Фурье на сфере был создан еще в XVIII веке (Лапласом, Лежандром и др.). Гармонический анализ на плоскости Лобачевского был создан лишь в сороковые годы XX века. А в пятидесятые годы Гельфанд со своими учениками открыл, что единым ключом к построению гармонического анализа являются преобразования типа преобразований Радона.

Солитоны

Одним из самых замечательных событий в математике второй половины двадцатого века явилось построение теории солитонов. Солитоны – это тип волн, обладающих весьма неожиданными свойствами. Уже сама первая встреча с такой «неожиданной волной» произвела на первооткрывателя необычного феномена – английского исследователя Джона Скотта Рассела – неизгладимое впечатление. Он увидел (после внезапной остановки баржи, плывшей по каналу) волну, которая приняла «форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости». Подобные «уединенные» (solitary) волны стали называть *солитонами*: в этом названии как бы соединены понятия одинокой волны и частицы (типа электрон, протон и т.п.).

Теория подобных феноменов была дана физиками и математиками лишь в наше время. Они оказались связанными с нелинейными волновыми уравнениями, типа уравнений Кортевега–де Фриса, открытых век тому назад для описания поведения волн на «мелкой воде». Теория таких уравнений связана со скрытой симметрией, в них заключенной, и с обратными задачами в теории дифференциальных уравнений, которые рассматривались в начале пятидесятых годов Гельфандом, Левитаном и др. Солитонам посвящена замечательная книжка А.Т.Филиппова «Многоликий солитон», изданная в Библиотечке «Квант» (вып. 48).

Теория катастроф

Одним из фундаментальных философских принципов является знаменитый принцип «перехода количества в качество», явившийся существенным компонентом гегелевской диалектики. В недавние времена им мотивировалась неизбежность революций. Вот цитата из старого энциклопедического словаря: «Метод диалектики по самому существу своему революционен (Герцен назвал его «алгеброй революции»), ибо из него неизбежно вытекает, что развитие в природе и обществе приводит к скачкам». В наше время появилась математическая теория, описывающая явления, «приводящие к скачкам». Не лишено забавности то, что этот раздел математики получил название не «теории революций», а «теории катастроф». Основоположником теории катастроф явился французский тополог Рене Том. Фундаментальный вклад в эту теорию внес В.И.Арнольд. За недостатком места я отсылаю читателя к очень интересной популярной брошюре В.И.Арнольда «Теория катастроф» (М.: Изд. МГУ, 1983).

Математика и физика

В конце пятидесятых годов произошло постепенное изменение ориентиров. Традиционные мехматские направления – теория функций, общая топология, классическая теория вероятностей, общая алгебра – стали смещаться в сторону алгебраической геометрии (школа Шафаревича), групп Ли, теории представлений и многих других актуальных вопросов того времени, разбиравшихся на семинаре Гельфанда, теории информации и динамических систем, развивавшихся под воздействием Колмогорова. И постепенно шло сближение с направлениями, навеянными математическими проблемами естествознания. Здесь наше поколение – в шестидесятые годы – постепенно становилось на свою стезю, не побуждаемое к тому своими учителями (за исключением, конечно, Гельфанда, который всегда оставался «на гребне волны» и чувствовал пульс современной науки). На смену отвлеченной математике пришли исследования, связанные с классической механикой, теорией элементарных частиц, статистической физикой…

Событиями мирового значения стали мехматские семинары и творческий вклад в эти новые направления В.И.Арнольда, В.М.Алексеева, Д.В.Аносова, Ф.А.Березина, Ю.И.Манина, В.П.Маслова, Р.А.Минлоса, С.П.Новикова, Я.Г.Синая и других. Феликс Александрович Березин был одним из первых, кто исходя из физических соображений (там давно появились фермионные, антикоммутирующие величины) стал изучать «суперматематику», где основным объектом являются суперпространства — пространства, у которых некоторые координаты коммутируют, а некоторые антикоммутируют. В итоге была создана как бы параллельная математика, в которой стали изучать супергеометрические, супералгебраические, супераналитические объекты. Суперматематика также принадлежит к тому, что родилось в последние полвека.

Кибернетика и информатика

Среди некоторых черт прошедшего полувека – смена периодов расцвета периодами увядания некоторых математических направлений. В середине пятидесятых годов функциональный анализ переживал свои звездные часы, особенно у нас. Нередко казалось, что здесь – центр всей математики. Об одном новом разделе функционального анализа – теории обобщенных функций – рассказывалось выше. Это привело к бурному развитию общей теории топологических векторных пространств, рождению нового раздела, промежуточного между геометрией и анализом, – выпуклого анализа, но потом все это ушло в довольно глубокую тень. Нечто сходное случилось с кибернетикой – наукой, рожденной как раз на рубеже обозреваемого периода.

Сейчас трудно передать то воодушевление, которым были охвачены многие ученые разных специальностей – математики, инженеры, медики, биологи, лингвисты, экономисты – от манящих идей о «связи, управлении и контроле» в живых организмах и ЭВМ. Тогда мечталось о том скором времени, когда будет осуществлен машинный перевод, машина научится мыслить, творить, сочинять музыку… И какая наступит тогда прекрасная жизнь! И многое осуществилось, но объединению человечества все это, к сожалению, не поспособствовало. (О том, «как это было», о бурном периоде рождения кибернетики и ее победоносном шествии по всему миру и по нашей стране можно прочитать в сборнике «Очерки истории информатики в России» (редакторы-составители Д.А.Поспелов и Я.И.Фет, Новосибирск, 1998). Интересно, однако, что в заголовке книги наличествует слово «информатика», а не «кибернетика» – этот термин почти ушел из употребления.)

Мы коснулись лишь событий, относящихся к двадцатипятилетнему периоду второй половины прошлого столетия (с 1950 по 1975 гг.), и почти исчерпали отведенный для данной статьи объем. Скажем еще о некоторых эпохальных событиях, но вскользь.

Решение проблем

Последние полвека были безусловно золотым периодом математики. В частности, было решено множество важных, много лет стоявших перед наукой проблем.

Огромным успехом явилось решение английским математиком Эндрю Уайлсом великой проблемы Ферма. Были решены проблема четырех красок (В.Хакен и К.Аппель) и кеплеровская проблема упаковки шаров (Т.Хейлс).

Проблема Ферма о невозможности нетривиального решения в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ была поставлена три с половиной века тому назад. В течение всего времени с тех пор, как стала известна запись Ферма на полях книги Диофанта «Арифметика» – «я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки, чтобы вместить его», – для решения этой проблемы предпринимались воистину титанические усилия крупнейших математиков, но тщетно. И вот наконец в 1993 году проблема оказалась решенной английским математиком Эндрю Уайлсом. Обо всем этом читатель может прочесть в замечательной книге Саймона Сингха «Великая теорема Ферма» (М.: МЦНМО, 2000).

Оказалась решенной и знаменитая проблема о четырех красках. Она состоит в том, что четырьмя красками возможно закрасить любую карту так, что никакие соседние страны не будут закрашены в один цвет. Эта проблема была поставлена полтора века тому назад, и на нее также были затрачены огромные интеллектуальные усилия. Тот способ, которым она оказалась разрешенной, не мог быть реализован ни в какие времена, кроме конца предыдущего столетия, ибо он потребовал невероятных по объему вычислений. В 1976 году В.Хакен и К.Аппель показали, что если все карты из некоего огромного списка можно окрасить в четыре цвета, то можно окрасить и любую карту. А компьютер «окрасил» все карты из приведенного списка. Следует сказать, однако, что не все математики согласны признать это решением проблемы: а вдруг машина ошиблась?!

Расскажем и еще об одной старинной проблеме, известной как гипотеза Кеплера об укладке шаров. Эта проблема еще старше, чем проблема Ферма. Она была поставлена в первой половине XVI века, когда английского математика Томаса Харриота спросили как-то о том, как наиболее экономно укладывать артиллерийские ядра на палубе корабля. Харриот написал об этой проблеме Иоганну Кеплеру, одному из величайших ученых всех времен. Кеплер не смог найти ничего лучшего, чем тот естественный способ, который применялся испокон века всеми моряками, укладывавшими ядра в пирамиду. В середине XX века проблема была редуцирована к некоей аналитической задаче, но она была слишком сложна для решения. Томас Хейлс упростил задачу. Его уравнение содержало «только» 150 неизвестных. Доказательство его разрешимости оказалось изложенным на 250 страницах. Оно потребовало 3 гигабайта компьютерной памяти. Однако, поскольку и здесь в доказательстве не обошлось без компьютера, некоторые математики сомневаются в его справедливости.

Много замечательных проблем было решено нашими соотечественниками. О 13-й проблеме Гильберта говорилось выше. Ю.В.Матиясевич решил 10-ю проблему Гильберта, об этом я писал в предыдущей статье. А.А.Болибрух поставил окончательную точку в разрешении 21-й проблемы. Рассказать об этом здесь подробнее не представляется возможным.

В 1902 году английский алгебраист У.Бернсайд поставил такой вопрос: всегда ли конечна конечно порожденная группа, каждый элемент которой имеет конечный порядок? Он специально выделил случай, когда порядки всех элементов группы ограничены в совокупности (ограниченная проблема Бернсайда). Общая проблема Бернсайда была решена Е.С.Голодом в 1964 году и доложена на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 году. На том же конгрессе были доложены решения еще двух знаменитых проблем: проблемы Лузина (поставленной в 1915 г.) о сходимости почти всюду ряда Фурье квадратично-суммируемой функции (ее решил шведский математик Карлесон) и проблему континуума – первую в списке гильбертовых проблем. Проблема была поставлена основоположником теории множеств Г.Кантором: «верно ли, что каково бы ни было несчетное подмножество единичного отрезка действительных чисел, можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и числами из единичного отрезка?» Гёдель в тридцатые годы доказал, что это утверждение (получившее название континуум-гипотезы) не может быть доказано на основе некоей общепринятой системы аксиом арифметики и теории множеств. Американский математик П.Коэн на московском конгрессе получил филдсовскую медаль за доказательство того, что континуум-гипотеза не может быть опровергнута на той же аксиоматической основе.

Опровержение ограниченной проблемы Бернсайда было опубликовано П.С.Новиковым и С.И.Адяном в 1968 году. Это – одна из самых трудных работ XX столетия. За дальнейшие продвижения в бернсайдовской проблематике филдсовской медали был удостоен новосибирский математик Е.И.Зельманов (ныне работающий в США).

Филдсовские медали

Свидетельством изменения ориентиров в современной математике в сравнении с математикой XIX века являются присуждения филдсовских медалей. Напомним, что на парижском конгрессе, на котором Д.Гильберт выступил со своими проблемами, работало лишь четыре секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики. Среди лауреатов филдсовской медали большинство представляют дисциплины, существовавшие в зачаточном состоянии в начале предыдущего века. Таковы топология, комплексный анализ, алгебраическая геометрия, математическая логика и физическая математика (т.е. физика, фактически слившаяся с новейшими разделами анализа, геометрии и топологии).

Приведем список всех филдсовских лауреатов, разбив их на две группы: в одной —ученые, представляющие «новые» области математики, в другой — «старые».

Впечатляющий список составляют топологи: Ж.-П.Серр (1954), Р.Том (1958), Дж.Милнор (1962), М.Атья (1966), С.Смейл (1966), С.П.Новиков (1970), В.Тёрстен (1983), М.Фридман (1986), С.Дональдсон (1986) и алгебраические геометры: А.Гротендик (1966), Х.Хиронака (1970), Д.Мамфорд (1974), П.Делинь (1978), Г.Фалтингс (1986), В.Дринфельд (1990), Ш.Мори (1990). Филдсовскими лауреатами становились специалисты по комплексному анализу: К.Кодаира (1954) и Ш.-Т.Яо (1983), по динамическим системам и голоморфной динамике: Ж.-К.Иоккоз (1994) и К.Мак-Малин (1998), по «физической математике»: В.Джонс (1990), Э.Виттен (1990), М.Концевич (1998). Всего 23 математика.

А вот ученые, представляющие анализ, алгебру и теорию чисел: Л.Шварц (1950), А.Сельберг (1950), К.Рот (1958), Л.Хёрмандер (1962), А.Бейкер (1970), Дж.Томпсон (1970), Э.Бомбьери (1974), Д.Квиллен (1978), Г.Маргулис (1978), Ч.Фефферман (1978), А.Коэн (1983), Ж.Бургейн (1994), П.-Л.Лионс (1994), Е.Зельманов (1994), Р.Боргердс (1998), Т.Гоуэрс (1998) – 16 математиков.

Уровень филдсовских медалей исключительно высок, и лишь один список филдсовских лауреатов свидетельствует о величии прошедшего века и дает надежду на то, что в будущем человечество ждет расцвет интеллекта и разума.