



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой "Квант").

№ 6 - 1998 г.

Конкурс имени А.П. Савина

*

Математический кружок

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.techno.ru/vivovoco>

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4–6 этого года и в №1 за 1999 год. Решения задач высылайте в течение месяца после получения номера журнала «Квант», в котором опубликованы условия задач, по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес. Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала.

11. Найдите наименьшее делящееся на 99 натуральное число, все цифры которого четны.

С.Волченков

12. В троллейбусе едут 175 пассажиров и два кондуктора. Каждый пассажир покупает билет только после того, как его три раза об этом попросят. Сначала первый кондуктор просит приобрести билет одного из безбилетных пассажиров, потом то же самое делает второй кондуктор, и так далее до тех пор, пока все пассажиры не купят билеты. Продажу какого наибольшего количества билетов может обеспечить себе первый кондуктор?

Ф.Назаров

13. Конь сделал 8 ходов и вернулся последним ходом на исходное поле. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях шахматной доски?

А.Спивак

14. На стороне AC треугольника ABC находится точка B_1 . На сторонах AB и BC постройте соответственно точки C_1 и A_1 так, чтобы площади треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C были равны.

В.Произволов

15. По окружности, разбитой на несколько дуг, прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она вычисляет длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. В частности, если блоха попала на границу двух дуг, то она дальше прыгает по часовой стрелке по граничным точкам, и тем самым посещает все дуги. Докажите, что в любом случае блоха побывает на всех дугах.

А.Шаповалов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Метаморфозы последовательностей

С. КОНОВАЛОВ

Е СЛИ Холмс и Ватсон, пробираясь через Гримпенскую трясиину, прыгают по кочкам, то такая «дискретизация» их пути вполне объяснима. Но когда идущие по гладкому аэродромному полю, замощенному бетонными плитами, стараются наступать (или не наступать) на линии стыковки этих плит, то объяснить это рационально значительно сложнее (в некоторых странах нежелание наступить на линию и стремление избежать встречи с черной кошкой – явления одного ряда).

Аналогичным магическим воздействием обладают последовательности, т.е.

функции натурального аргумента: возникает желание изучать эту функцию, «прыгая» от точки к точке и не замечая, что вокруг — числовая прямая, по которой можно «ходить»! Но для изучения функций, определенных только на множестве натуральных чисел, у нас нет мощных инструментов в виде теорем дифференциального и интегрального исчисления, поэтому непосредственное изучение последовательностей (конечных или бесконечных) часто становится весьма трудным делом.

С другой стороны, если для данной последовательности a_n ($n = 1, 2, \dots$) мы

подберем функцию $a(x)$, определенную при всех $x > 0$ и такую, что $a(n) = a_n$ для каждого натурального n , то изучив функцию $a(x)$ «целиком», мы узнаем и то, как она ведет себя в целочисленных точках. Конечно, чтобы для анализа свойств функции $a(x)$ можно было применять соответствующие теоремы, она должна быть достаточно «хорошей», например, непрерывной или имеющей производную в каждой точке.

Подобрать функцию, определяемую не очень сложной формулой, не всегда легко, хотя непрерывных линий, проходящих через точки $(n; a_n)$ на координатной плоскости, бесконечно много.

В простейших случаях достаточно заменить n на x : например, последовательности $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ соответствует функция $a(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Для последовательности $a_n = (-1)^n$ подобная замена невозможна, но предварительное преобразование $(-1)^n =$

Мои лингвистические исследования

(из путевых заметок Лемюэля Гулливера)

...ШТОРМ разбил мое судно, и мне пришлось, ухватившись за обломок мачты, положиться на волю волн. Долго носило меня по бушующему океану, я страдал от голода, холода и жажды и очень опасался прожорливых акул, которые встречаются в этих широтах повсеместно. Все силы мои были исчерпаны, и сознание мутилось; но судьба была благосклонна ко мне: я не утонул, не умер от жажды и не попал в утробу акулы; на третий день вынесло меня на песчаный берег. Долго лежал я на песке, не в силах двинуться с места; я только и сумел, что перерезать ремень, которым привязал себя к мачте. К счастью, пришло время отлива, и море отступило от берега; иначе меня могло вновь смыть волной, и я наверное бы утонул.

Не знаю, сколько я так пролежал; вероятно, я был без сознания. Помню только, что через какое-то время возле моего лица оказались босые черные ноги. Я повернул голову и не сдержал стога: все тело мое

болело, как избитое. Мышцы, одеревеневшие от отчаянного усилия удержать бревно, протестовали...

На меня смотрело круглое черное лицо, вполне добродушное, хотя и слегка озадаченное. Впоследствии, обжившись на архипелаге Трокототту, я узнал, что аборигены никогда прежде не видели белого человека, и нашедший меня туземец не сразу решил, принадлежу ли я к людскому роду и можно ли ко мне прикасаться без опасных для себя последствий. Вдруг я – морское божество и обижусь на него, чем навлеку бедствия на него самого, всю семью, а то и всю деревню? Но, к счастью для меня, туземец по некотором размышлении все же счел меня человеком и позвал на подмогу односельчан. Меня перенесли в плетеную хижину, крытую банановыми листьями, и выхаживали столь нежно и заботливо, что до конца дней своих я буду вспоминать это простодушное дикое племя с благодарностью.

Я понемногу выздоравливал и очень подружился с

островитянами. Объяснялись мы большей частью знаками, но постепенно я стал понимать отдельные слова, и мы часами беседовали с моим спасителем, отчаянно жестикулируя. Звали его Доддо, а племя его называлось ододо. Меня удивило, что в их языке нет других звуков, кроме О и Д; никогда прежде мне не приходилось встречать подобного. Заинтересовавшись, я попытался составить словарик местного наречия. Каково же было мое изумление, когда оказалось, что при всей бедности фонетики, т.е. звукового устройства, некоторые по-разному звучащие слова означают в точности одно и то же! Размахивая руками и даже вспотев от усердия, Доддо втолковывал мне, что два слова значат одно и то же в следующих случаях. Если из слова выбросить сочетание ДО или ООДД, его значение не изменится; оно не изменится и в том случае, если в любое слово место слова добавить сочетание ОД. Это очень удобно для стихотворцев: слово всегда можно подогнать под нужный размер, удлинив или укоротив его, потому-то на острове оказалось очень развито ритуальное пение. Я объяснил, как устроен классический европейский сонет, и Доддо мгновенно симпровизировал мне сонет на местном языке. Я ничего не понял, ибо для моего непривычного слуха это звучало как «ододо – додо – доодоо» и так далее. В конце концов я оставил попытки разобраться в этом удивительном языке, так и не сумев выяснить, значат ли слова ОДД и ДОО одно и то же. Быть может, кто-нибудь из читателей моих заметок когда-нибудь разберется в этом вопросе...

Вы спросите, почему архипелаг называется Трокототту – ведь в этом слове есть и «т», и «р», и «у»? Разумеется, Доддо выговаривал это как Ддодододдо; но на соседних островах обитали племена с более богатой речью. Трокототту – так звучит имя архипелага на островах Ронго-Рунга, о которых я расскажу как-нибудь в другой раз.

Через некоторое время, когда я совсем оправился, Доддо взял меня с собой на ярмарку на соседний остров. Он назывался Икнатсо; как видите, там язык был несколько разнообразнее. Так что Доддо объяснялся с соседями при помощи жестов, как и со мной.

Жители острова пришли в восторг при виде моей белой кожи и светлых волос; каждый хотел меня потрогать. Остров был довольно велик, и далеко не все его обитатели были на ярмарке; но каждому хотелось, чтобы его родичи из дальних деревень посмотрели на такого удивительного человека. Поэтому местный вождь принял меня и уговорил меня погостить на его острове – чтобы удовлетворить любопытство соплеменников. Не очень-то приятно осознавать себя таким ярмарочным уродцем, вроде бородатой дамы, на которую любуются за деньги на английских ярмарках. Но вождь был так любезен и так меня уговаривал, что я согласился. Меня с великим почетом проводили в лучшую хижину местной столицы (деревушки в три десятка хижин), наташили целую гору местных плодов, вкуснее которых я не едал прежде, и даже предложили в жены

местную первую красавицу. Но я отказался, будучи добропорядочным христианином, и объяснил, что в далекой Англии меня ждет семья, так что здесь я жениться никак не могу. Красавица огорчилась, но, к счастью, ненадолго. Еще до моего отъезда с Икнатсо она вышла замуж за сына вождя и, надеюсь, будет с ним счастлива.

Мне жилось сытно и привольно, но довольно скучно. Все мои обязанности сводились к тому, чтобы несколько часов в день сидеть на столичной площади под навесом, дабы туземцы, прибывавшие со всех концов острова, могли насмотреться на меня вволю. От нечего делать я стал изучать местный язык и обнаружил, что название острова и племени – Икнатсо – содержит все звуки, которые известны туземцам. В отличие от ододо, они умели писать, хотя весь их алфавит содержал лишь семь букв: И, А, С, Т, Н, О, К.

Я стал записывать слова местного языка; вождь заметил это и спросил, что я делал. Я объяснил ему, что хочу составить словарь его племени. Вождь чрезвычайно заинтересовался и принялся расспрашивать меня, что же такое словари; разобравшись, он пришел в восторг и захотел иметь полный словарь языка икнатсо.

Наутро мне доставили стопку банановых листьев, нанизанных на стебель лианы – так здесь делают книги – и острый шип колючего кустарника танкиос вместо пера. Курьер низко поклонился мне и пояснил, что это – для словаря.

Я выписал на первом листе подряд буквы И, К, Н, А, Т, С, О и принялся систематизировать слова.

Надо вам сказать, что в языке племени икнатсо любое сочетание всех этих букв – слово, а других слов нет. Так что словарь обещал быть не слишком большим. Из уважения к вождю я первым поставил слово Икнатсо и стал упорядочивать мой словарь в соответствии с именно таким порядком букв в алфавите.

Работа подвигалась медленно, ибо мне все время приходилось прерывать ее: то необходимо было мое присутствие на праздничном обеде – их давали по два – три в день, и все в мою честь; то жители какой-нибудь дальней деревни непременно хотели сплясать для меня и поднимали такой шум, что невозможно было сосредоточиться; то маленькие туземные ребятишки повисали на мне, дергая меня за волосы – каждый хотел волосок на память, – и мне приходилось осторожно стряхивать их с себя, дабы не остаться лысым; словом, через неделю я добрался только до СКОАТНИ, что значит «доблестный воин, всегда попадающий в цель острым копьем».

Но тут работа моя оказалась прервана: с острова Перра-Терра приплыла пирога воинственных карабасов, и главный карабас по имени Бас потребовал от вождя икнатсо поделиться с соседями диковинкой, т.е. мной. Карабасы были раскрашены белыми и красными полосами, в носу у каждого красовалась куриная кость, в ушах висели разноцветные раковины, на руках и ногах звенели медные браслеты, и вооружены

они были до зубов.

Вождь племени икнатсо обнял меня со слезами и объяснил, что ссориться с карабасами очень опасно, так что придется мне ехать на Перру-Терру. Больше всего его огорчало, что словарь остался незаконченным. Я, как мог, утешил его, объяснил еще раз принципы составления словарей и вручил ему книгу и шип со словами: «Не сомневаюсь, что столь мудрый вождь сам сможет завершить сей труд».

Тут карабасы потеряли терпение, подхватили меня за руки и за ноги и усадили в пирогу. Мы отчалили. Некоторое время я еще размышлял, какое слово должно идти за СКОАТНИ и каким словом закончится словарь, но тут поднялся ветер, пирогу начали швырять волны, и мне стало не до словарей. Ответы на эти вопросы я оставляю читателям; меня же ждал таинственный остров Перра-Терра...