



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1998 г.

Математический кружок

М. Панов, А. Спивак

Вписанные многоугольники

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.techno.ru/vivovoco>

Вписанные многоугольники

М. ПАНОВ, А. СПИВАК

МЫ РАССКАЖЕМ о задаче из «Задачника «Кванта» – объясним, откуда она возникла, покажем ее разнообразные связи с другими задачами.

М1624. *Внутри вписанного в окружность выпуклого n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ найдется отличная от центра окружности точка P , из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков $A_1P, A_2P, \dots, A_nP$ быть рациональными числами? Разберите случаи: а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 7$; д) $n > 8$.*

Поскольку «связи» даже более красивы и интересны, чем сама задача, кому-то покажется, что она – только повод для разговора. Наверное, так оно и есть. Но один из нас узнал обо всем этом, будучи школьником и заинтересовавшись этой задачей. Приглашаем повторить этот путь.

Свойство правильного треугольника

Если есть ради чего стараться, то не грех и перестараться.

Начнем с классической задачи. Она столь замечательна, что вошла в «Задачник «Кванта» одной из первых. Мы решим ее пятью способами.

Задача 1 (М18, а). *На дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X . Докажите, что $AX + BX = CX$ (рис. 1).*

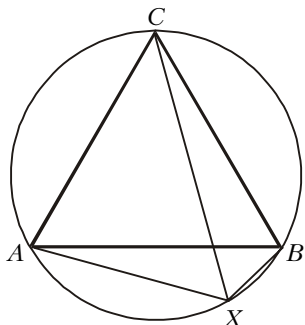


Рис. 1

Первое решение (для восьмиклассников – с равными треугольниками и теоремой о вписанном угле). Отложим на XC отрезок XY , равный отрезку BX (рис. 2).

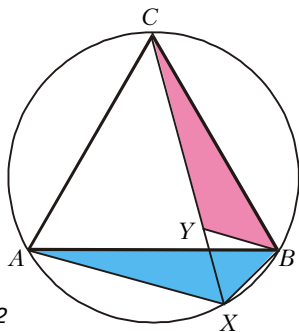


Рис. 2

По теореме о вписанном угле, $\angle CXB = \angle CAB = 60^\circ$. Поэтому $\triangle XBY$ правильный. При повороте вокруг B на 60° точка C переходит в A , точка Y – в X . Поэтому треугольники CBY и ABX равны, $CY = AX$. Следовательно,

$$CX = CY + YX = AX + BX.$$

Второе решение (очень похожее на первое). Построим на отрезке XB вовне правильный треугольник XZB (рис. 3). При повороте вокруг B на 60° точка

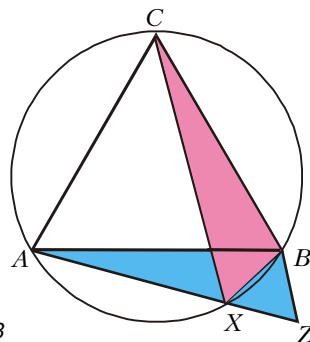


Рис. 3

C переходит в точку A , X – в Z , $\triangle CXB$ – в $\triangle AZB$. Значит, $CX = AZ$. Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника $AXBC$ равна 180° , имеем $\angle AXB = 120^\circ$, так что точки A, X, Z лежат на одной прямой. Следовательно,

$$AX + BX = AX + XZ = AZ = CX.$$

Третье решение (для девятиклассников – с теоремой косинусов). Обозначим $AB = BC = CA = l$, $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$. По теореме косинусов

находим из $\triangle AXC$ и $\triangle CXB$:

$$l^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ,$$

$$l^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ.$$

Вычитая почленно, получаем $a^2 - b^2 - ac + bc = 0$, откуда

$$(a - b)(a + b - c) = 0.$$

Осталось разделить на $a - b$. (Случай $a = b$ разберите самостоятельно.)

Четвертое решение (для десятиклассников – с тригонометрическими формулами). Проведем диаметр XX' (рис. 4). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$. Тогда треугольники $XX'A'$, $XX'B$, $XX'C$ – прямоугольные с гипотенузой XX' .

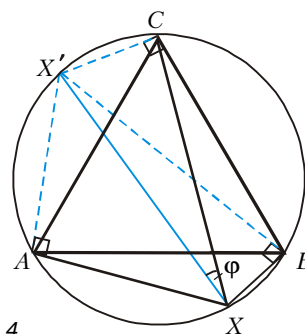


Рис. 4

Следовательно,

$$AX = XX' \cos(60^\circ - \varphi),$$

$$BX = XX' \cos(60^\circ + \varphi),$$

откуда

$$\begin{aligned} AX + BX &= XX' (\cos(60^\circ - \varphi) + \cos(60^\circ + \varphi)) = \\ &= XX' \cdot 2 \cos 60^\circ \cos \varphi = XX' \cos \varphi = CX. \end{aligned}$$

Пятое решение (для учеников математических классов – с теоремой Птолемея). Для вписанного четырехугольника $AXBC$ запишем теорему Птолемея:

$$AX \cdot BC + BX \cdot AC = CX \cdot AB.$$

Разделив на длину стороны треугольника ABC , получим требуемое.

Упражнение 1. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P . Докажите, что $AP + CP = \sqrt{2}BP$.

Свойство шестигульника

Мы пятью способами решили задачу 1. А сейчас переформулируем ее, изменив до неузнаваемости.

Задача 2. *Если диагонали AD, BE и CF вписанного шестигульника*

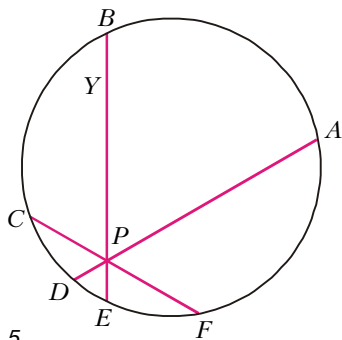


Рис. 5

ABCDEF пересекаются в точке *P* под углом 60° друг к другу (рис. 5), то

$$AP + CP + EP = BP + DP + FP. \quad (1)$$

Решение. Проведем через точку *P* окружность, concentricкую описанной окружности шестиугольника (рис. 6). Тогда

$$\begin{aligned} AP + CP + EP &= \\ &= AX + XP + CP + EP, \\ BP + DP + FP &= \\ &= BY + YP + DP + FZ + ZP. \end{aligned}$$

Поскольку $AX = DP$, $BY = EP$, $CP = FZ$, задача 2 сводится к проверке

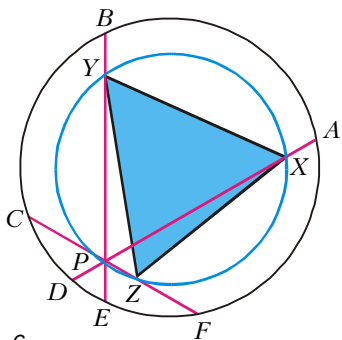


Рис. 6

равенства $XP = YP + ZP$. Оно обеспечено задачей 1, поскольку треугольник XYZ равносторонний (по теореме о вписанном угле, $\angle YZX = \angle YPX = 60^\circ$ и $\angle XYZ = \angle XPZ = 60^\circ$).

Аналогичное задаче 2 утверждение можно сформулировать и в случае, когда точка *P* лежит вне шестиугольника.

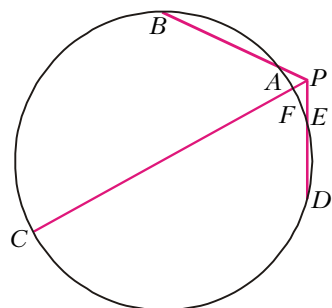


Рис. 7

ка. А именно, если под углом 60° друг к другу провели три прямые, которые пересекли некоторую окружность, как показано на рисунке 7, то легко доказать равенство

$$-AP + CP - EP = BP + DP - FP.$$

Оно аналогично равенству (1), только некоторые отрезки «взяты со знаком минус».

Упражнения

2. Через точку проведены три прямые под углом 60° друг к другу. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами равностороннего треугольника.

3. а) Через точку провели четыре прямые под углом 45° друг к другу (рис. 8).

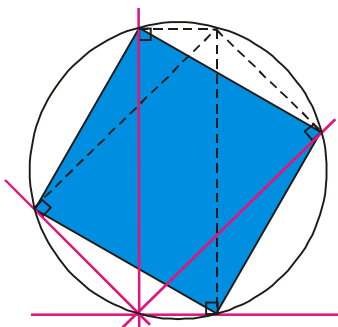


Рис. 8

Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами квадрата.

б) Окружность разделили диаметрами на равные дуги и из произвольной точки опустили перпендикуляры на эти диаметры. Докажите, что основания этих перпендикуляров – вершины правильного многоугольника (который вырождается в точку, если «опускать перпендикуляры» из центра окружности, и вырождается в «двуугольник», если окружность разделили двумя диаметрами на четыре равные дуги).

Случай $n = 4$ задачи M1624

Займемся пунктом а). Напомним, что если хорды KM и LN окружности пересекаются в точке *S*, то $KS \cdot MS = LS \cdot NS$. Более того, легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. Если отрезки KM и LN пересекаются в точке *S*, то необходимым и достаточным условием принадлежности точек *K*, *L*, *M* и *N* одной окружности является равенство $KS \cdot MS = LS \cdot NS$.

В силу леммы, для построения примера к пункту а) достаточно взять любые два перпендикулярных отрезка, которые делятся точкой пересечения на такие отрезочки длин a , b , c , d , что ac

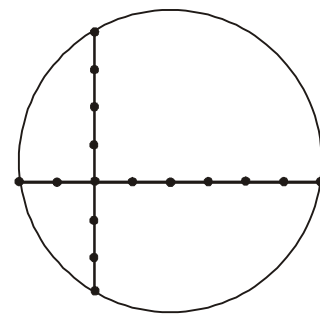


Рис. 9

$= bd$. Годятся, например, $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$ (или $a = 6$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$, как на рисунке 9).

Случай $n = 6$

Для вписанного шестиугольника $ABCDEF$, диагонали AD , BE , CF которого под равными углами пересекаются в точке *P*, как мы доказали, выполняются равенства

$$\begin{cases} a + c + e = b + d + f, \\ ad = be = cf, \end{cases} \quad (2)$$

где $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, $d = PD$, $e = PE$, $f = PF$.

В пункте в) задачи M1624 мы должны выяснить, могут или нет все длины a , b , ..., f быть рациональными, если точка *P* не является центром окружности.

Лемма 2. Если на пересекающихся под углом 60° друг к другу прямых от точки их пересечения *P* отложить отрезки $PA = a$, $PB = b$, ..., $PF = f$, для которых выполнены равенства (2), то получим вписанный шестиугольник $ABCDEF$.

Доказательство. Отложим сначала на двух прямых отрезки $PA = a$, $PB = b$, $PD = d$, $PE = e$. В силу леммы 1, точки *A*, *B*, *D*, *E* попадут на одну окружность. Рассмотрим точки *C'* и *F'* пересечения этой окружности с третьей прямой и обозначим $c' = PC'$, $f' = PF'$. Тогда

$$\begin{cases} a + c' + e = b + d + f', \\ ad = be = c'f', \end{cases} \quad (3)$$

где c' и f' – это вовсе не производные, а всего лишь длины отрезков PC' и PF' .

Из систем (2) и (3) имеем:

$$\begin{cases} c - c' = f - f', \\ cf = c'f'. \end{cases}$$

Запишем первое уравнение в виде $c - f = c' - f'$, возведем в квадрат и прибавим к результату учетверенное

второе уравнение:

$$(c+f)^2 = (c' + f')^2.$$

Значит, $c + f = c' + f'$. Вспомнив уравнение $c - f = c' - f'$, получаем: $c = c'$, $f = f'$. Лемма 2 доказана.

Упражнение 4. Придумайте другой способ доказательства равенств $c = c'$, $f = f'$, основанный на том, что числа c и $-f$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (c - f)x = cf$, а «другими» корнями того же самого уравнения являются числа c' и $-f'$.

Чтобы построить пример к пункту в), осталось предъявить решение системы (2) в натуральных числах a, b, c, d, e, f , не все из которых равны друг другу. На заставке (с. ??) приведено даже три примера. Хотите узнать, как их придумали? Решите следующие три упражнения!

Упражнения

5. Придумайте натуральные числа, не все из которых равны друг другу, удовлетворяющие уравнениям $ad = be = cf$.

6. Придумайте решение системы (2) в натуральных числах, не все из которых равны друг другу.

Указание. Воспользуйтесь числами, найденными в предыдущем упражнении, и дополните их разумным образом.

7. Придумайте бесконечную серию решений системы (2), отличную от $a = b = c = d = e = f$.

Свойство пятиугольника

Задача 3. На дуге AE описанной окружности правильного пятиугольника $ABCDE$ отмечена точка X . Докажите, что $AX + CX + EX = BX + DX$.

Первое решение (тригонометрическое). Проведем диаметр XX' (рис.10). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$, $XX' = d$. Тогда треугольник AXX' прямоугольный, откуда $AX = XX' \cos \angle AXX' = d \cos(72^\circ + \varphi)$. Аналогично, $BX = d \cos(36^\circ + \varphi)$, $CX = d \cos \varphi$, $DX = d \cos(36^\circ - \varphi)$, $EX = d \cos(72^\circ - \varphi)$. Зна-

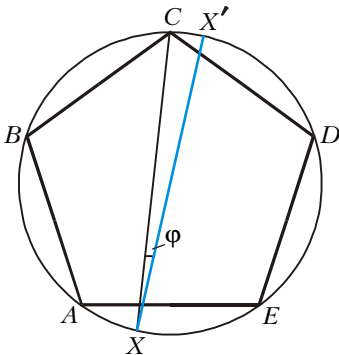


Рис. 10

чит, осталось проверить тождество

$$\begin{aligned} \cos(72^\circ + \varphi) + \cos \varphi + \cos(72^\circ - \varphi) &= \\ &= \cos(36^\circ + \varphi) + \cos(36^\circ - \varphi). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\cos(72^\circ + \varphi) + \cos(72^\circ - \varphi) = 2 \cos 72^\circ \cos \varphi,$$

$$\cos(36^\circ + \varphi) + \cos(36^\circ - \varphi) = 2 \cos 36^\circ \cos \varphi,$$

достаточно доказать равенство $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2$.

Домножим его левую часть на $\sin 36^\circ$:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ \sin 36^\circ - \cos 72^\circ \sin 36^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} \sin 72^\circ - \frac{1}{2} (\sin 108^\circ - \sin 36^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 36^\circ, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание. Равенство $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2$ можно доказать проще, проведя биссектрису KN угла K равнобедренного треугольника KLM с углом при вершине $\angle M = 36^\circ$ и основанием $KL = 1$ (рис. 11). Возникнут равнобе-

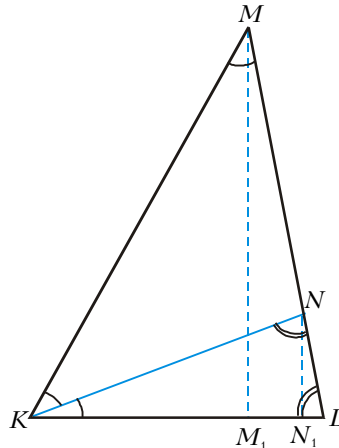


Рис. 11

ренные треугольники LKN и KNM . Значит, $MN = NK = KL = 1$. Опустив перпендикуляры MM_1 и NN_1 на основание треугольника, получим: $KN_1 = \cos 36^\circ$, $M_1N_1 = MN \cos 72^\circ = \cos 72^\circ$,

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= KN_1 - M_1N_1 = \\ &= KM_1 = 1/2. \end{aligned}$$

Второе решение (со скалярными произведениями). Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ единичной длины вдоль лучей XA , XC , XE , а векторы $\vec{b}$, $\vec{d}$ — вдоль лучей BX и DX (рис. 12). Тогда $AX = \vec{a} \cdot \vec{XX}'$, $CX = \vec{c} \cdot \vec{XX}'$, $EX = \vec{e} \cdot \vec{XX}'$, $BX = -\vec{b} \cdot \vec{XX}'$, $DX = -\vec{d} \cdot \vec{XX}'$. Значит,

$$\begin{aligned} AX + CX + EX - BX - DX &= \\ &= (\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d}) \cdot \vec{XX}'. \end{aligned}$$

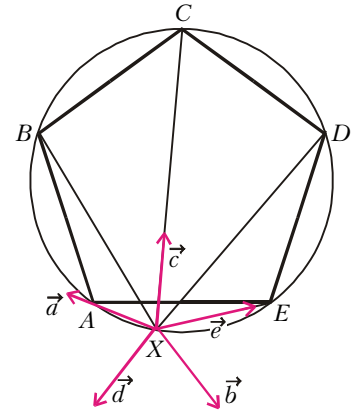


Рис. 12

Проверим равенство $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} = 0$. Для этого заметим, что по теореме о вписанном угле прямые AX ,

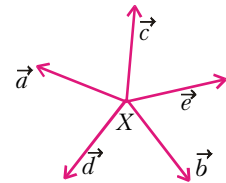


Рис. 13

BX , CX , DX и EX пересекаются под равными углами (рис. 13). Если бы сумма $\vec{s} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d}$ была отлична от $\vec{0}$, то вектор $\vec{s}$ изменялся бы при повороте на 72° . Но при этом повороте слагаемые $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$ всего лишь переставляются местами, переходя в $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ соответственно.

Упражнения

8. Докажите, что для любого правильного многоугольника сумма векторов, проведенных в его вершины из центра описанной окружности, равна нулю.

9. 999 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 1998-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю. (Санкт-Петербургская математическая олимпиада 1998 года, С.Берлов)

10. Правильный n -угольник $A_1A_2...A_n$ вписан в окружность с радиусом R и центром O . Пусть P — произвольная точка этой окружности. Докажите, что сумма проекций на прямую OP всех n векторов, соединяющих точку P с вершинами n -угольника, равна nR .

11. Вычислите суммы косинусов

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 0 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \\ + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}, \end{aligned}$$

$$6) \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5},$$

$$в) \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7},$$

$$г) \sum_{j=1}^k \cos \frac{2\pi j}{2k+1}, \text{ где } k - \text{натуральное}$$

число.

Указание. Прочитайте статью Н.Б.Васильева и В.А.Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$ » в «Кванте» №2 за 1996 г.

12. а) Докажите, что для любой точки X дуги A_1A_7 описанной окружности правильного семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ верно равенство

$$A_1X + A_3X + A_5X + A_7X = A_2X + A_4X + A_6X.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон.

13. а) Докажите, что если диагонали A_1A_6 , A_2A_7 , A_3A_8 , A_4A_9 , A_5A_{10} вписанного десятиугольника пересекаются под равными углами в точке P , то

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 + PA_9 = PA_2 + PA_4 + PA_6 + PA_8 + PA_{10}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многоугольника с четным числом сторон, не делящимся на 4.

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 12-угольника.

14. Решите задачу 3 третьим способом, применив теорему Птолемея к четырехугольникам $ABCX$, $BCDX$, $CDEX$, $DEXA$ и $EXAB$.

Случай $n = 8$

Обратимся к пункту б) задачи M1624. Пусть диагонали вписанного восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ пересекаются под равными углами в точке P (рис. 14). Опустим из центра O описанной окружности перпендикуляры OB_1 , OB_2 , OB_3 и OB_4 на диагонали A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 и A_4A_8 . Получим, в силу упражнения 3, квадрат $B_1B_2B_3B_4$, на описанной окружности которого лежит точка P . Если бы длины всех отрезков

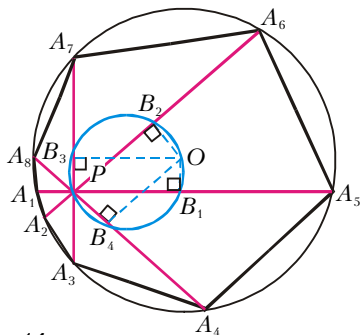


Рис. 14

PA_i ($i = 1, \dots, 8$) были рациональны, то и длины отрезков $PB_1 = (PA_5 - PA_1)/2$, ..., $PB_4 = (PA_6 - PA_8)/2$ были бы рациональны, что противоречит равенству $PB_1 + PB_3 = \sqrt{2}PB_2$ упражнения 1.

Случай четного $n > 6$

Займемся пунктом д) для четных n . Пусть, для определенности, центр O окружности лежит внутри угла A_2PA_3 . Обозначим $\angle OPA_2 = \theta$. Опустим перпендикуляры PB_1 , PB_2 и PB_3 на прямые PA_1 , PA_2 и PA_3 . Тогда

$$PB_1 = OP \cos \left(\frac{\pi}{n} + \theta \right),$$

$$PB_2 = OP \cos \theta,$$

$$PB_3 = OP \cos \left(\frac{\pi}{n} - \theta \right),$$

откуда

$$PB_1 + PB_3 = 2OP \cos \theta \cos(\pi/n) = 2PB_2 \cos(\pi/n),$$

т. е. $\cos(\pi/n) = (PB_1 + PB_3)/(2PB_2)$.

Если бы длины всех отрезков PA_i были рациональными, то и длины

$$PB_1 = (PA_1 - PA_{n+1})/2,$$

$$PB_2 = (PA_2 - PA_{n+2})/2,$$

$$PB_3 = (PA_3 - PA_{n+3})/2$$

были бы рациональными. Но при $n > 3$ число $\cos(\pi/n)$ иррационально (доказательство см. в *Приложении*).

Случай нечетного $n > 3$

Продолжим каждый из лучей A_iP , где $i = 1, \dots, n$, до пересечения с окружностью в точке B_i . В силу упражнения 13,

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n.$$

По свойству хорд,

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \dots = PA_n \cdot PB_n.$$

Значит, величина $PA_i \cdot PB_i = c$ одна и та же для всех $i = 1, \dots, n$.

Предположим, что все длины PA_i рациональны. Подставив выражения $PB_i = c/PA_i$ в формулу (4), получим равенство

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = c \left(\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \dots + \frac{1}{PA_n} \right),$$

из которого следует, что c – рациональное число. Значит, рациональны и все выражения $PB_i = c/PA_i$. В предыдущем разделе доказано, что такого не бывает.

Приложение

Как известно, $\cos \pi = -1$ и $\cos(\pi/3) = 1/2$ – рациональные числа. С другой стороны, $\cos(\pi/2) = 1/\sqrt{2}$ – иррациональное число. Иррациональность чисел вида $\cos(\pi/n)$ была использована нами в разделе «Случай четного $n > 6$ ». Эту иррациональность можно доказывать разными способами. Красивое геометрическое доказательство изложено в статье А.Егорова «Решетки и правильные многоугольники» (см. Приложение к журналу «Квант» №5 за 1998 год).

Мы докажем иррациональность чисел вида $\cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$, при помощи алгебры, точнее, при помощи *полиномов Чебышёва* T_n . Они названы в честь великого русского математика XIX века Пафнутия Львовича Чебышёва, открывшего многие удивительные свойства этих полиномов, в частности – то, что именно они «наименее уклоняются от нуля». Нам потребуются лишь самые простые свойства многочленов T_n .

Лемма 3. Существуют многочлены с целыми коэффициентами T_n и Q_{n-1} степеней, соответственно, n и $n-1$, для которых

$$\begin{cases} \cos n\alpha = T_n(\cos \alpha), \\ \sin n\alpha = \sin \alpha Q_{n-1}(\cos \alpha). \end{cases}$$

Следствие из леммы 3. Если число $\cos \alpha$ рационально, то рациональны и все числа вида $\cos k\alpha$, где $k = 1, 2, \dots$

Доказательство леммы 3. Применим индукцию. База очевидна: при $n = 1$ имеем $T_1(x) = x$ и $Q_0(x) = 1$.

Переход тоже не сложен:

$$\begin{cases} \cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha = \\ = T_n(\cos \alpha) \cos \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) Q_{n-1}(\cos \alpha), \\ \sin(n+1)\alpha = \cos n\alpha \sin \alpha + \sin n\alpha \cos \alpha = \\ = T_n(\cos \alpha) \sin \alpha + \sin \alpha Q_{n-1}(\cos \alpha) \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. По индукции из формул (5) легко вывести утверждение следующей леммы.

Лемма 4. Старшие коэффициенты многочленов T_n и Q_{n-1} равны 2^{n-1} .

Подготовка закончена. Пора пристально взглянуть на число $x = \cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$.

Предположим, что число x рационально, и разберем несколько случаев.

Если n делится на 4, то противоречие очевидно: $1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4) = \cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{4}\right)$ оказывается, в силу следствия из леммы 3, рациональным числом.

Если n нечетно, воспользуемся равенством $-1 = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) = T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)$. Оно означает, что x удовлетворяет уравнению $T_n(x) + 1 = 0$. Как известно,

рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами имеют вид p/q , где p — делитель свободного члена, а q — делитель старшего коэффициента. В нашем случае q оказывается степенью двойки, а p равно 1, поскольку при нечетном n свободный член многочлена $T_n(x) + 1$ равен 1 (свободный член многочлена T_n можно найти очень легко, подставив $\alpha = \pi/2$ в тождество $\cos(n\alpha) = T_n(\cos \alpha)$). Значит, $x = 1/2^k$ для некоторого целого неотрицательно-го k . Осталось вспомнить, что $x =$

$= \cos(\pi/n) > \cos(\pi/3) = 1/2$ — и противоречие получено.

Случай, когда n обладает нечетным делителем $m > 3$, тоже легко привести к противоречию: $\cos \frac{\pi}{m} = \cos\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{n}\right)$.

А больше никаких случаев рассматривать не надо — любое натуральное число $n > 3$ делится на 4 или имеет нечетный делитель, больший числа 3.