



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1998 г.

Олимпиады - задачи и задания

**V Российская олимпиада школьников по
астрономии и космической физике**

**Избранные задачи Санкт-Петербургской
математической олимпиады**

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.techno.ru/vivovoco>

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Заключительный этап Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике 1998 года прошел точно в те же сроки и в том же месте, что и в прошлом году: с 7 по 12 апреля в городе Троицке Московской области, на базе Фонда «Байтик» и Центра новых педагогических технологий. Научное и идейное руководство олимпиадой осуществляло Астрономическое общество.

В Троицк прибыл 121 школьник из 32 регионов России. Как и в прошлые годы, участники олимпиады были разделены на три возрастные группы: 8—9, 10 и 11 классы (правда, задания для учащихся 8 и 9 классов немного различались). Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех участников по 8—9 классам, двух десятиклассников и двух одиннадцатиклассников, а также (дополнительно) победителей Российской и Международной олимпиад 1997 года (эти нормы сохраняются и на 1999 г.) и российских победителей заочной олимпиады журнала «Звездочет». Заметим, кстати, что (согласно Положению об олимпиаде) города и районы России, проводящие у себя астрономические олимпиады, по согласованию с Координационным советом, могут представлять свою область на заключительном этапе, если областные олимпиады в этой области не проводятся.

8 и 10 апреля прошли, соответственно, теоретический и творческо-практический туры. На теоретическом туре школьникам было предложено 6 задач, а в задание творческо-практического тура была включена одна творческая задача и одна практическая (работа с фотографиями, сделанными на космическом телескопе «Хаббл»). Продолжительность каждого тура для участников составляла 4 часа, а вот жюри работало существенно дольше. Задачи этого года оказались гораздо более «живыми», что отразилось и на стиле изложения решений. Несомненными лидерами по числу оригинальных решений и фраз в решениях стали: в первом туре — задача про светящиеся кошачьи глаза, во втором — задача про деноминацию; не случайно их взялся проверять председатель жюри (профессор астрономического отделения МГУ А.С.Расторгуев). И ведь какие ответы были! Кошачьи глаза сверкали вплоть до -47^m (этакий галактический монстр)! Легко посчитать, что такую звездную величину можно было бы получить, приблизившись к Солнцу в 10000 раз (а приблизиться, как известно, можно максимум в 108 раз). На самом деле, глаз «среднестатистического кота» (как было написано в одной из работ) с расстояния в 5 метров светит, как звезда порядка -7^m . Ну а советов правительству галактики Млечный Путь было не меньше, чем дебатов в нашей Госдуме.

Важным методическим моментом этой олимпиады были меньшая формализация условий задач и существенное увеличение числа задач оценочного характера, в которых целью решения должны быть не числа или формулы, а понимание явления. Ведь решение именно таких задач развивает у школьников умение делать простые оценки, т.е. быстро и без громоздких вычислений получать правильное представление о разнообразных явлениях и объектах.

Каждая задача первого тура оценивалась из 10 баллов, второго — из 20; таким образом, максимально возможное число баллов составляло 100. Как обычно, после второго тура участники олимпиады могли ознакомиться с оценкой своих работ первого тура, побеседовать с членами жюри, обратиться с апелляцией.

В день между турами олимпиады — 9 апреля — в Московском городском дворце детского и юношеского творчества прошла традиционная научно-практическая конференция, посвященная Дню Космонавтики. Правда, это, хорошо продуманное мероприятие для школьников Москвы, к сожалению, явно не вписалось в программу Российской олимпиады.

Задачи олимпиады

Теоретический тур

8 класс

1. В какой четверти Луна лучше освещает Землю — в первой или в третьей? Ответ обоснуйте и поясните рисунком.

2. В ночь с 23 на 24 февраля 1987 года астрономы зафиксировали вспышку сверхновой звезды в галактике Большое Магелланово облако, расстояние до которой от Земли около 55 кпк. В каком году на самом деле произошла эта вспышка?

3. Приблизительно сколько раз в году при благоприятной погоде могут любоваться полной Луной белые медведи? Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики около 5° . Считайте, что белые медведи живут вблизи Северного полюса.

4. Искусственный спутник, находящийся на низкой околоземной орбите, пролетел над Харьковом ($\varphi \approx 50^\circ$ с.ш., $\lambda \approx 36^\circ$ в.д.). Над каким городом или над какой местностью (приблизительно) он пролетит через один оборот вокруг Земли?

5. Год на Меркурии длится 88,0 суток, а период обращения вокруг своей оси составляет 58,7 суток (направления обоих вращений совпадают). Найдите продолжительность меркурианских суток.

6. Определите, внутри или вне Солнца находится центр масс Солнечной системы, пренебрегая массами всех планет, кроме Юпитера. Масса Солнца в 1050 раз больше массы Юпитера. Известно, что диаметр Солнца в 108 раз меньше расстояния от Земли до Солнца, а расстояние от Юпитера до Солнца составляет 5,2 а.е.

9 класс

1—4. См. задачи 1—4 для 8 класса.

5. Оцените, сколько времени длится в Троицке заход Солнца (т.е. время от первого до последнего касания горизонта солнечным диском). Широта Троицка $\varphi \approx 55^\circ 30'$ с.ш., долгота

На закрытии олимпиады каждому участнику была подарена «Астрономическая энциклопедия для школьников» (выпущенная издательством «Аванта +») и сборник олимпиадных задач по астрономии «Звездный мир» (автор – М.Г.Гаврилов). Призерам олимпиады были вручены также дипломы, ценные подарки и главный приз олимпиады: для одиннадцатиклассников – приглашение на физические и астрономические отделения ведущих вузов России (университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Екатеринбург), а для остальных – приглашение на V Осеннюю астрономическую школу в Специальную астрофизическую обсерваторию РАН, в рамках которой состоится третья Международная астрономическая олимпиада.

Как обычно, во время олимпиады прошла конференция учителей астрономии. Были обсуждены проблемы как общешкольного, так и дополнительного образования, утвержден порядок проведения I съезда учителей астрономии РФ и стран СНГ (декабрь 1998 г., п. Черноголовка Московской обл.).

Теперь – немного об итогах и о будущем. Российская астрономическая олимпиада отметила свой пятилетний юбилей. Год от года растет число школьников, участвующих в городских и областных олимпиадах, а по числу участников заключительного этапа олимпиада вышла на пятое место, уступая только самым «почтенным» олимпиадам – по математике, физике, химии и биологии. Стали проводиться заочные конкурсы, победители которых участвуют сразу в заключительном этапе (как в былые годы победители конкурса журнала «Квант» участвовали в олимпиадах по математике и физике). Место проведения заключительного этапа следующей олимпиады пока не определено (может быть, это и к лучшему – за все предыдущие годы олимпиада ни разу не прошла в заранее намеченном месте). Городами-кандидатами на проведение олимпиады 1999 года являются Петергоф, Петрозаводск, Майкоп и Нижневартовск.

По традиции, все ваши вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач, другим вопросам, а также интересные задачи, условия которых вы хотели бы видеть в будущих олимпиадах) просим сообщать автору по электронной почте: gavrlov@issp.ac.ru или почтовому адресу: 142432 п. Черноголовка Московской обл., Институтский пр., 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач обоих туров олимпиады, а также список призеров.

$\lambda \approx 37^\circ 15'$ в.д., угловой диаметр солнечного диска $2\rho = 32'$.

6. Вы путешествуете по поясу астероидов, характерная плотность пород которых составляет $3,5 \text{ г/см}^3$. Каковы могут быть размеры астероидов, по которым можно бегать (с такой же скоростью, как на Земле), не боясь «упасть» в космос?

10 класс

1. На какой максимальной высоте может кульминировать Луна в Троицке? Наклонение эклиптики к плоскости небесного экватора $\varepsilon = 23,5^\circ$, а плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики $i = 5,1^\circ$; широта и долгота Троицка $\varphi \approx 55^\circ 30'$ с.ш. и $\lambda \approx 37^\circ 15'$ в.д.

2. Гвинейскими астрономами обнаружена одна весьма плотная планета системы $\tau \text{ Lynx Major}$. Период обращения планеты вокруг своей оси составляет всего лишь $T = 6$ мин. Какой может быть плотность этой планеты?

3. Определите, внутри или вне Солнца находится центр масс Солнечной системы. Необходимые данные возьмите

из таблиц Солнечной системы. Видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha = 9,3 \cdot 10^{-3}$ рад, а масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли.

4. На сколько различаются видимые звездные величины Солнца летом и зимой, если эксцентриситет земной орбиты $e = 0,017$?

5. На небе имеется около 160 тысяч звезд ярче 10^m . Считая, что они распределены по небу равномерно, оцените, как часто происходит их покрытие Луной.

6. С какой планеты – Венеры или Марса – легче (по энергетическим соображениям) запустить космический зонд на поверхность Солнца, и каким образом следует это осуществить? Какое время будет длиться полет? Необходимые данные возьмите из таблиц Солнечной системы.

11 класс

1. Некоторая галактика наблюдается как диск с угловым размером около $\alpha = 0,5'$, а красное доплеровское смещение в спектрах этой галактики составляет 2% ($\Delta\lambda/\lambda = 0,02$). Сравните эту галактику с нашей по размерам. Посто-

янную Хаббла считать равной $H = 75 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}$.

2. Малая планета №887 (астероид Алинда) обращается вокруг Солнца по вытянутой эллиптической орбите. Для наблюдателя, находящегося вблизи Солнца, его блеск меняется на $\Delta m = 5,24^m$. Определите, на сколько меняется звездная величина Солнца, если наблюдать его с Алинды.

3. На просторах Тихого океана между Чили, Новой Зеландией и Антарктидой находится точка земного шара, диаметрально противоположная нам. Наш исследователь, стоящий «в чистом поле», наблюдает заход Солнца. Солнечный диск только что коснулся горизонта своим нижним краем. Что в этот самый момент увидит наблюдатель в диаметрально противоположной точке земного шара?

4. Наверно, вы нередко замечали, что порой ночью у котов ярко светятся глаза (как правило, желтым или зеленым светом), особенно если не-вдалеке имеется источник света – уличный фонарь, например. Наиболее хорошо блеск кошачьих глаз будет замечен, если вы правильно выберете взаимное расположение себя, фонаря и кота. А теперь представьте, что вы наблюдаете кота, любующегося полной Луной. Приняв расстояние от себя до кота равным 5 м (как правило, ближе коты ночью людей не подпускают), оцените примерно максимальную возможную звездную величину каждого кошачьего глаза. Звездная величина Луны в полнолуние равна $-12,7^m$. Иные сведения о Луне и котах вспомните сами.

5. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гомана–Цандера (в перигелии эта орбита касается орбиты Земли, а в афелии – орбиты Марса). Найдите время такого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по орбите такой же формы. Из численных данных вам известны только периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца: 365,25 суток и 687 суток соответственно. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

6. Оцените приблизительно размер солнечного паруса, с помощью которого можно было бы свободно путешествовать по Солнечной системе на космическом корабле-яхте массой 10 тонн (массой паруса можно пренебречь). Солнечная постоянная равна примерно $1,4 \text{ кВт/м}^2$, расстояние от Земли до Солнца около 150 млн км.

Элементы планетных орбит

Планета	Среднее расстояние от Солнца		Сидерический период обращения		Синодический период, в средних сутках	Эксцентриситет (e)	Наклон орбиты (i)	Расстояние от Земли, в млн км	
	в а.е.	в млн км	в тропич. годах	в средн. сутках				наименьшее	наибольшее
Меркурий	0,387	57,9	0,241	87,97	115,88	0,206	7°00'	82	217
Венера	0,723	108,2	0,615	224,70	583,92	0,007	3 24	39	260
Земля	1,000	149,6	1,000	365,26	—	0,017	0 00	—	—
Марс	1,524	227,9	1,880	686,98	779,94	0,093	1 51	56	400
Юпитер	5,203	778,3	11,862	4332,59	398,88	0,048	1 18	591	965
Сатурн	9,539	1427,0	29,458	10759,20	378,09	0,054	2 29	1199	1653
Уран	19,191	2871,0	84,015	30685,93	369,66	0,046	0 46	2586	3153
Нептун	30,071	4498,6	164,788	60187,64	367,48	0,008	1 46	4309	4682
Плутон	39,529	5913,5	247,697	90471,85	366,72	0,253	17 08	4249	7558

Физические характеристики больших планет

Планета	Экваториальный диаметр		Объем относит. Земли	Масса		Средняя плотность, г/см ³	Период вращения вокруг оси орбиты	Наклон экватора к плоскости орбиты	Альбедо
	в км	относит. Земли		10 ²⁴ кг	относит. Земли				
Меркурий	4880	0,38	0,055	0,33	0,054	5,45	58сут 15ч 30мин	0°	0,06
Венера	12104	0,95	0,84	4,87	0,845	5,25	?	?	0,78
Земля	12756	1,00	1,00	5,97	1,000	5,52	23ч 56мин 04с	23°27'	0,36
Марс	6794	0,53	0,15	0,64	0,107	3,89	24 37 23	24 48	0,15
Юпитер	142984	11,21	1327	1898	317,88	1,32	9 50 40	3 07	0,66
Сатурн	120536	9,45	757	568	95,17	0,69	10 14 24	26 45	0,68
Уран	51118	4,01	63	86,8	14,54	1,28	10 49 *)	98 00	0,74
Нептун	49532	3,88	58	102	17,16	1,62	15 48	29 36	0,58
Плутон	2274	0,18	0,006	0,01	0,002	2,06	?	?	0,65

*)Вращение обратное

Творческо-практический тур

8—9 классы

1. В 1996 году на космическом телескопе «Хаббла» был проведен уникальный эксперимент: требовалось увидеть как можно более слабые объекты на небе, не достигаемые для наземной техники. В результате многочасовых экспозиций, выполненных с четырьмя светофильтрами, были получены изображения небольшой области неба вдали от Млечного Пути с площадью несколько квадратных угловых минут, где можно различить объекты до 29—30 звездной величины. Вам даются фотокопии изображений (полученные с некоторым уменьшением предельной звездной величины). На оригинальных изображениях удалось обнаружить около 2000 галактик, но лишь для небольшой части из них можно уверенно определить морфологический тип. Ваша задача: для выбранных объектов (они помечены цифрами) определить (по внешнему виду и цветовому оттенку), к какому классу они

относятся. Используйте обозначения:

* — звезда нашей галактики, S — спиральная галактика, E — эллиптическая галактика, Ir — неправильная галактика. Там, где можно указать подкласс галактики, укажите: тип Sa или Sc.

Примечание. Галактика №30 указана не совсем точно: вы ее найдете, переместив стрелочку на 30° против часовой стрелки.

2. В 2098 году астрономы Футурландии, пользуясь стареньким наземным двадцатиметровым телескопом, открыли замечательный во многих отношениях астероид, движущийся по круговой орбите. Оказалось, что видимый путь, пройденный им на небе за пять лет наблюдений, имеет вид куса натянутой цепи с пятью удлиненными звеньями, как бы положенной сверху на веревочку. Оцените угловой размер «большой оси» звеньев этой цепи и период обращения вокруг Солнца астероида, открытого нашими футурландскими коллегами. Перерисовав в тетрадь «цепочку», отметьте на ней точки,

в которых блеск объекта достигает минимумов и максимумов.

10—11 классы

1. См. задачу 1 для 8—9 классов.

2. 1 января 1998 года правительством галактики Млечный Путь произведена деноминация 1:1000 «мер и весов» внутри галактики. Деноминация распространяется на область Вселенной радиусом (первоначальным) 20 кпк с центром в центре нашей галактики. При этом центр галактики остается в том же месте относительно других галактик, не меняется пространственная ориентация, но все расстояния между объектами внутри галактики уменьшаются в 1000 раз. В той же области деноминируется масса всей материи, т.е. в 1000 раз уменьшаются массы всех макро- и микрообъектов, даже элементарных частиц и электромагнитных волн. Кроме того, в течение всего 1998 года сохраняют свое действие «старые» значения всех мировых констант (скорость света, гравитационная постоянная, постоянная Планка, и т.п.).

Исследуйте последствия деноминации для населения галактики: в частности, к каким физическим последствиям в 1998 году это приведет, будет ли галактика и ее объекты устойчивыми,

что обнаружат ученые-астрономы и т.д. И, если уж правительство галактики решилось на деноминацию «мер и весов», то какие еще физические параметры тоже стоило бы деноминировать?

Сингулярность и невыполнение некоторых законов сохранения в момент резкой деноминации 1 января не рассматривать.

М.Гаврилов

Дипломы I степени

получили

Бакай Д. – Санкт-Петербург, 9 кл.,
Барташевич А. – Нижний Новгород, 10 кл.,
Бирюков А. – Нижний Новгород, 10 кл.,
Воронин П. – Волгоград, 11 кл.,
Евдокимов Н. – Москва, 11 кл.,
Золотухин И. – Москва, 9 кл.,
Иванченко М. – Нижний Новгород, 11 кл.,
Лемешев В. – Тихвин, 10 кл.,
Литвин А. – Саров Нижегородской обл., 9 кл.,
Рахеев М. – Челябинск, 10 кл.,
Саввин А. – Рязань, 11 кл.,
Самарин П. – Екатеринбург, 9 кл.,
Терентев Д. – Краснодар, 11 кл.,
Шапиро А. – Санкт-Петербург, 10 кл.

Дипломы II степени

получили

Ангер В. – с.Ижевское Рязанской обл., 9 кл.,
Войцик П. – Москва, 8 кл.,
Гедерцев А. – Ухта, 8 кл.,
Головин Д. – Лесной Свердловской обл., 11 кл.,
Горяинов Д. – Липецк, 11 кл.,
Гулевич Д. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Долгов С. – Кингисепп, 11 кл.,
Журавлев В. – Москва, 11 кл.,
Задорин А. – Калининград, 10 кл.,
Захаров Р. – Сыктывкар, 10 кл.,
Канищев К. – Железнодорожный Красноярского кр., 8 кл.,
Матяж И. – Казань, 10 кл.,
Павлюченко С. – Ухта, 11 кл.,
Филиппов Е. – Санкт-Петербург, 10 кл.,
Хайрулин Р. – Нижний Новгород, 9 кл.,
Хрешков А. – Рязань, 11 кл.

Дипломы III степени

получили

Бармашова Т. – Нижний Новгород, 7 кл.,
Гоков Е. – Белгород, 10 кл.,
Дегтярёв В. – Оренбург, 9 кл.,
Дёмин А. – Ставрополь, 11 кл.,
Иванов А. – Челябинск, 8 кл.,
Ильин Д. – Казань, 11 кл.,
Карев Ю. – Ухта, 10 кл.,
Кротов Д. – Екатеринбург, 9 кл.,
Курилова Т. – Москва, 9 кл.,
Макеев М. – Славянск-на-Кубани, 8 кл.,
Мальнев А. – Сочи, 10 кл.,
Миронов Д. – Тихвин, 9 кл.,
Петров А. – Приморско-Ахтарск, 9 кл.,
Полиэктов В. – Архангельск, 11 кл.,
Постнов А. – Оренбург, 10 кл.,
Устюжанин А. – Ижевск, 9 кл.,
Фомин Д. – Ижевск, 10 кл.,
Чураев А. – Самара, 11 кл.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от -7 до 7 , чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным?

(7, Ю.Базлов)¹

2. а) Докажите, что в любом шестидесятизначном числе, среди цифр которого нет нулей, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 1001 .

(7)

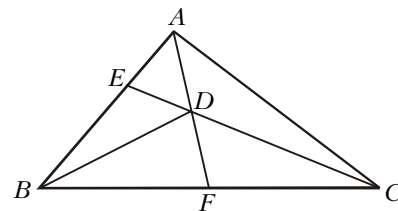
б) Докажите, что в любом тридцатипятизначном числе, среди цифр которого нет нулей и пятерок, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 41 .

(11, жюри)

3. AF – медиана треугольника ABC , D – середина отрезка AF , E – точка пересечения прямой CD со стороной AB (см. рисунок). Докажите, что если $BD = BF$, то $AE = DE$.

(8, С. Берлов)

4. Найдите наименьшее положительное число x , удовлетворяющее неравенству $[x] \cdot \{x\} \geq 3$. (Как обычно, $[x]$



и $\{x\} = x - [x]$ – целая и дробная части числа x .)

(9, А.Храбров)

5. Параллельная стороне BC треугольника ABC прямая пересекает прямые AB и AC в точках K и L . Перпендикуляры, восстановленные в точках K и L к прямым AB и AC , пересекаются в

¹В скобках после условий указаны класс, которому предлагалась задача, и автор.

точке M . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.
(9, А.Храбров)

6. Уравнение $f(x) = 10$, где f – многочлен с вещественными коэффициентами, имеет ровно 10 вещественных корней, а уравнение $f'(x) = 15$ имеет ровно 15 вещественных корней. Докажите, что хотя бы один из корней этих уравнений удовлетворяет уравнению $f'(x) = 0$.

(11, К.Кохась)

Второй (городской) тур

7. Пятизначное число назовем неразложимым, если оно не представляется в виде произведения двух трехзначных чисел. Какое наибольшее число неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

(6, С.Берлов)

8. Через клетчатый квадрат 100×100 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в синий и красный цвета. Докажите, что количество синих клеток четно.

(7, С. Иванов)

9. Несколько служащих получили одинаковую зарплату. После этого время от времени кто-нибудь брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным. После нескольких таких операций у одного из служащих оказалось 24 копейки, а еще у одного – 17 копеек. Сколько было служащих?

(7, Р.Исмаилов)

10. По кругу как-то расставили числа от 1 до 30. Стоящие на соседних местах числа можно менять местами. После нескольких таких операций каждое число перешло на диаметрально противоположное место. Докажите, что в некоторый момент меняли местами числа, сумма которых равна 31.

(8, С. Берлов)

11. Дана последовательность натуральных чисел a_n , в которой при всех n выполняется соотношение

$$a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1.$$

Может ли эта последовательность содержать более 1998 различных чисел?

(8, С.Берлов)

12. В лагерь приехало несколько школьников. У каждого из них не больше 30 знакомых среди приехавших. Докажите, что школьников можно расселить в 60 комнат так, чтобы никакие

двое знакомых не оказались в одной комнате и при этом не было бы школьника, у которого больше одного знакомого и все они живут в одной комнате.

(8, Д.Карпов)

13. В остроугольном треугольнике ABC точка M – середина стороны BC . Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X , а прямые MC_1 и AC – в точке Y . Докажите, что $XY \parallel BC$.

(9, Д. Ростовский)

14. Числа a , b , c удовлетворяют равенству

$$\max(a, b) + \max(c, 1997) = \min(a, c) + \min(b, 1998).$$

Докажите, что $b \geq c$.

(10, А. Храбров)

15. O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке D , а продолжение высоты, опущенной из вершины A , пересекает окружность в точке E . Докажите, что площадь четырехугольника $BECD$ равна площади треугольника ABC .

(10, М.Пратусевич)

16. Город расположен на нескольких островах, соединенных между собой мостами. При поездках по городу жители выражают длину своего пути числом мостов, которые им приходится переезжать. После того как один из мостов закрыли на ремонт, каждый горожанин заявил: «У меня есть друг, кратчайший путь к которому содержит теперь ровно на один мост больше, чем раньше». Докажите, что хотя бы один из островов – необитаемый.

(10, Ф.Назаров)

17. Две плоскости делят куб на четыре части равного объема. Докажите, что и поверхность куба они делят на четыре части одинаковой площади.

(11, М.Гусаров)

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружность, описанная вокруг треугольника ABO , пересекает сторону AD в точке E . Окружность, описанная вокруг треугольника DOE , пересекает отрезок BE в точке F . Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.

(9, С. Берлов)

19. На листе клетчатой бумаги нарисовали многоугольник так, что внутри

него оказалось более 90 узлов, а ни на сторонах, ни в вершинах нет ни одного узла. Докажите, что стороны многоугольника пересекают линии сетки по крайней мере в 40 точках.

(9, С.Иванов)

20. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на две его противоположные стороны симметричны относительно прямой, соединяющей середины двух других сторон.

(9, С.Берлов)

21. На каждом из 10 листов бумаги написано несколько степеней двойки. Суммы чисел на всех листах одинаковы. Докажите, что какая-то из степеней двойки встречается на этих листах не менее 6 раз.

(10, С.Иванов)

22. В стране 1998 городов. Любые два города соединены авиалинией. Цены билетов на всех авиалиниях различны. Могут ли все круговые маршруты (проходящие через каждый город по одному разу и возвращающиеся в исходный пункт) иметь одинаковую стоимость?

(10, К.Кохась)

23. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в ее середине D , а сторону BC – в точке E . Окружность, проходящая через точку E и касающаяся в точке C прямой AC , пересекает прямую DE в точке F . K – точка пересечения прямых AC и DE . Докажите, что прямые CF , AE и BK пересекаются в одной точке.

(11, С.Берлов)

24. Найдите все такие многочлены $P(x, y)$ от двух переменных, что $P(x + y, y - x) = P(x, y)$ при любых x и y .

(11, А.Голованов)

25. В окружность с центром O и радиусом 1 вписан $2n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$. Докажите, что

$$\left| \vec{A_1A_2} + \vec{A_3A_4} + \dots + \vec{A_{2n-1}A_{2n}} \right| \leq 2 \sin \left((\angle A_1OA_2 + \dots + \angle A_{2n-1}OA_{2n}) / 2 \right).$$

(11, Ю.Базлов)

26. Пусть $\tau(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n . Докажите, что последовательность $\tau(n^2 + 1)$ ни с какого места не становится строго возрастающей.

(11, А. Голованов)

Публикацию подготовили
В.Сендеров, А.Спивак