



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1998 г.

Практикум абитуриента

А. Овчинников, В. Плис

Аналогии в задачах по физике

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.techno.ru/vivovoco>

Аналогии в задачах по физике

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС

ДОВОЛЬНО часто при решении задачи обнаруживается, что она аналогична какой-то другой, уже решенной, причем степени близости задач могут быть весьма разнообразными. Заметив аналогию новой и старой задач, мы получаем дополнительный шанс на успех в поисках решения новой. В этом смысле «рассуждение по аналогии» является одним из методов решения задач (наряду с такими, как соображения симметрии или размерностей, преобразования системы отсчета, использование графиков или векторных диаграмм и т.п.).

В качестве примеров рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом V . Рабочий объем камеры насоса V_0 . Во сколько раз уменьшится давление в сосуде после n ходов поршня? Переход воздуха из сосуда в камеру насоса считайте изотермическим процессом.

В каждом цикле работы насоса будем различать два процесса: один — это изотермическое расширение воздуха от объема V до объема $V + V_0$, другой — освобождение камеры насоса от воздуха, оказавшегося в ней в конце первого процесса.

В соответствии с уравнением Менделеева — Клапейрона, число молей воздуха, производящего в объеме V давление p при температуре T , равно

$$\nu = \frac{pV}{RT},$$

где R — универсальная газовая постоянная. В первом акте расширения воздуха условие сохранения количества молей воздуха с учетом постоянства температуры можно описать уравнением

$$pV = p_1(V + V_0).$$

После удаления воздуха из камеры насоса и возврата поршня в исходное положение произойдет второе расширение оставшегося в сосуде воз-

духа:

$$p_1V = p_2(V + V_0),$$

затем третье, четвертое... и, наконец, n -е расширение воздуха:

$$p_{n-1}V = p_n(V + V_0).$$

Перемножив соответственно левые и правые части этих n уравнений, получим

$$pV^n = p_n(V + V_0)^n.$$

Отсюда после простых преобразований окончательно находим ответ на вопрос задачи:

$$\frac{p}{p_n} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^n.$$

Задача 2. Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U и отсоединен от источника. К этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью C_0 . Когда заканчивается перераспределение зарядов, зарядившийся второй конденсатор (емкостью C_0) отсоединяют от первого конденсатора (емкостью C). Затем к первому конденсатору присоединяют следующий незаряженный конденсатор емкостью C_0 и т.д. Во сколько раз уменьшится напряжение на конденсаторе емкостью C после n подключений конденсаторов емкостью C_0 ?

Эта задача аналогична предыдущей, и ответ, по-видимому, тоже аналогичен предыдущему:

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Проверим это, проведя подробное решение.

В первом акте происходит «расселение» исходного заряда по двум параллельно соединенным конденсаторам. При этом заряд сохраняется, поэтому можно записать

$$CU = (C + C_0)U_1.$$

Во втором акте «расселению» подвер-

гается заряд CU_1 :

$$CU_1 = (C + C_0)U_2,$$

и так далее. Наконец, n -й акт описывается соотношением

$$CU_{n-1} = (C + C_0)U_n.$$

Перемножив соответствующим образом эти равенства друг на друга, получим

$$C^n U = (C + C_0)^n U_n,$$

или (после простых преобразований)

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Таким образом, сравнивая эти две задачи, можно заключить, что похожие процессы, хотя и имеют различную физическую природу, описываются сходной математикой и имеют ответы на аналогичные вопросы в виде совпадающих математических конструкций. Более того, аналогичными оказываются отношения p/p_n и U/U_n , а также V_0/V и C_0/C .

Задача 3. Тонкий обруч массой m и радиусом R вращается равномерно вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с частотой n . Найдите величину силы натяжения, возникающей в обруче.

При раскручивании обруча до частоты n он слегка деформируется (увеличивается его длина), и возникает сила натяжения. На рисунке 1 выделен малый участок кольца, на концы которого действуют две силы натяжения, величиной T каждая. Длина участка равна $R \cdot 2\Delta\alpha$. При достаточно малом угле $\Delta\alpha$ участок можно считать материальной точкой массой $m(R \cdot 2\Delta\alpha)/(2\pi R)$, движущейся по окружности с линейной скоростью $2\pi Rn$ и центростремительным ускорением $a = (2\pi Rn)^2/R$ под действием радиальных составляю-

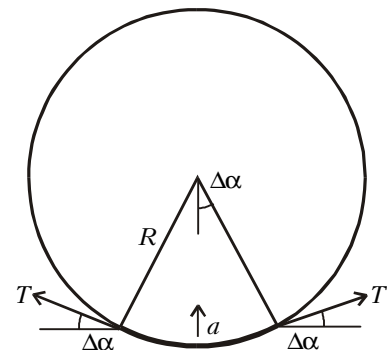


Рис. 1

щих двух сил натяжения, равных в сумме $2T\Delta\alpha$. Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, в проекции на радиальное направление имеем

$$\left(\frac{m}{2\pi R} R \cdot 2\Delta\alpha\right) \frac{(2\pi R n)^2}{R} = 2T\Delta\alpha,$$

откуда получаем

$$T = 2\pi R n^2 m.$$

Задача 4. Тонкое проводящее кольцо радиусом R , по которому течет ток I , расположено в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, причем вектор поля перпендикулярен плоскости кольца. Найдите величину силы натяжения, возникающей в кольце.

На рисунке 2 выделен элементарный участок кольца длиной $R \cdot 2\Delta\alpha$ с током I в магнитном поле, причем вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен к читателю. В соответствии с законом Ампера, участок испытывает со стороны магнитного поля действие силы, равной $\Delta F = I(R \cdot 2\Delta\alpha)B$ и направленной так, как показано на рисунке 2. Обратим внимание на то, что закон Ампера применим только к прямолинейному отрезку проводника с током, так что мы должны потребовать, чтобы угол $\Delta\alpha$ был мал. Учитывая, что выделенный участок кольца покоится, из

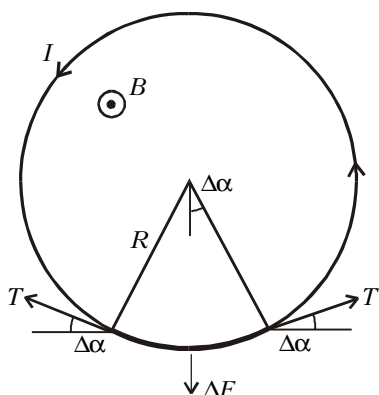


Рис. 2

второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление имеем

$$0 = 2T\Delta\alpha - I(R \cdot 2\Delta\alpha)B,$$

откуда

$$T = IRB.$$

По-видимому, родственный характер явлений, рассматриваемых в задачах 3 и 4, не так очевиден, как в задачах 1 и 2, но структура решений двух последних задач делает их близкими.

Аналогию, обнаруживаемую при сравнении рисунков 1 и 2, можно усилить, если

задачу 3 решать в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг центра обруча, так что в этой системе обруч покоится. Тогда кроме сил натяжения, показанных на рисунке 1, на участок обруча будет действовать еще центробежная сила инерции $\Delta \vec{F}_c$, направленная против вектора ускорения $\vec{a}$ и равная по величине $\Delta m a$, т.е.

$$\left(\frac{m}{2\pi R} R \cdot 2\Delta\alpha\right) \frac{(2\pi R n)^2}{R}.$$

Картина сил качественно совпадает с показанной на рисунке 2. Более того, как и в задаче 4, соответствующий участок обруча теперь покоится. Таким образом, сменив систему отсчета, мы усилили аналогию.

Сравнивая ответы в задачах 3 и 4, можно также обнаружить некие соответствия: совсем понятное $R \leftrightarrow R$, вызывающее сочувствие $nm \leftrightarrow I$ и загадочное $2\pi n \leftrightarrow B$.

Задача 5. Покажите, что минимальная работа по зарядке первоначально незаряженного конденсатора равна $QU(Q)/2$. Здесь Q и $U(Q)$ — окончательные заряд конденсатора и напряжение между его пластинами.

На рисунке 3 изображен график зависимости напряжения на конденсато-

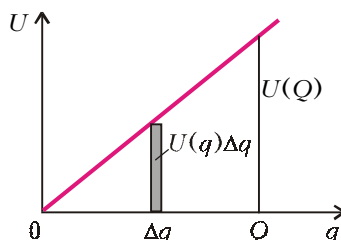


Рис. 3

ре от величины его заряда. В соответствии с определением электрической емкости,

$$U(q) = \frac{1}{C} q.$$

Из графика видно, что величина U , численно равная работе внешней силы по переносу единичного положительного заряда с отрицательно заряженной пластины конденсатора на положительно заряженную, тем больше, чем больше заряд q конденсатора. Работа по дополнительной зарядке конденсатора от заряда q до $q + \Delta q$ равна $U(q)\Delta q$ — на рисунке 3 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работа по зарядке конденсатора от $q = 0$ до $q = Q$ может быть найдена как сумма произведений $U(q)\Delta q$, т.е. как площадь прямоугольного треугольника с катетами Q и $U(Q)$:

$$A = \frac{1}{2} QU(Q).$$

Задача 6. Покажите, что минимальная работа по строительству верти-

кальной однородной колонны массой m и высотой H из материала, первоначально расположенного в тонком слое на горизонтальной плоскости, совпадающей с основанием колонны, равна $mgH/2$, где g — ускорение свободного падения. Площадь поперечного сечения колонны одинакова по всей высоте.

Известно, что формула mgh позволяет найти потенциальную энергию небольшого тела массой m , поднятого на высоту h над нулевым уровнем, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Соответственно, величина gh может рассматриваться как минимальная работа по поднятию на высоту h единичной массы.

Пусть ρ — плотность материала, из которого строится колонна:

$$\rho = \frac{m}{SH},$$

где S — площадь поперечного сечения колонны. На рисунке 4 представлен график зависимости величины gh от массы колонны (в процессе ее строительства) ρSh . График показывает, что чем больше высота, а значит, и масса ρSh уже построенной части колонны, тем большую работу gh следует совер-

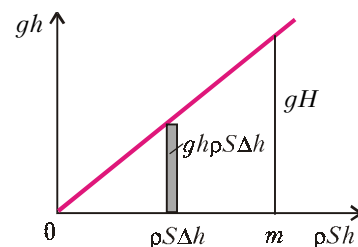


Рис. 4

шить по подъему очередной единичной массы. Работа по увеличению высоты колонны от h до $h + \Delta h$ равна $gh \cdot \rho S \Delta h$ — на рисунке 4 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работу по строительству всей колонны можно найти как площадь прямоугольного треугольника с катетами m и gH :

$$A = \frac{1}{2} mgH.$$

В задачах 5 и 6 аналогичны структуры мысленных экспериментов по зарядке конденсатора и сооружению колонны; аналогичны также методы решения и структуры ответов.

Задача 7. Два тела массами m_1 и m_2 движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого тела объединяются. Сколько тепла выделится в результате удара?

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

где $\vec{v}$ – скорость образовавшегося тела, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q.$$

Перейдя от векторных уравнений к скалярным, после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

Задача 8. Два небольших проводящих шарика радиусами R_1 и R_2 , заряженные до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно, находятся далеко друг от друга. Сколько тепла выделится через достаточно большое время после соединения шариков друг с другом длинной проволокой?

Будем считать известным, что потенциал φ заряженного шарика связан с его зарядом q формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная. Закон сохранения заряда для рассматриваемого процесса соединения шариков запишем в виде

$$4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1 + 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi + 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi,$$

где φ – окончательный потенциал шариков и соединяющей их проволоки. Рассматривая шарик как конденсатор (второй обкладкой служит концентрическая с шариком сфера бесконечного радиуса) емкостью $4\pi\epsilon_0 R$, можно подсчитать энергию шарика, заряженного до потенциала φ , по формуле $C\varphi^2/2$ (потенциал в бесконечности принят за ноль). С учетом этих соображений, закон сохранения энергии перепишем так:

$$\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2^2}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi^2}{2} + Q.$$

Отсюда и из закона сохранения заряда после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Математическая структура окончательных формул в задачах 7 и 8 одна и та же, и это связано, видимо, с аналогией использованных при решении двух законов сохранения – заряда и импульса.

Задача 9. Легкий стержень может вращаться без трения вокруг горизон-

тальной оси, проходящей через его середину. К концам стержня прикреплены небольшие тела массами m_1 и m_2 . Стержень удерживают в горизонтальном положении. Какие ускорения возникнут у каждого из тел сразу (в первый момент) после того, как стержень отпустят и у него появится возможность вращаться вокруг оси? Найдите также величину силы давления оси на стержень в этот момент времени.

На рисунке 5 показаны силы, действующие на стержень и на каждое из

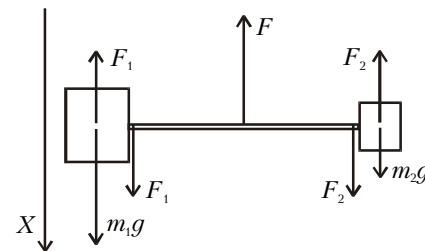


Рис. 5

прикрепленных к нему тел в интересующий нас момент времени. Запишем уравнения движения для тел массами m_1 и m_2 в проекции на ось X :

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - F_1,$$

$$m_2 a_{2x} = m_2 g - F_2.$$

Уравнение моментов для стержня, с учетом равенства расстояний от каждого из тел до оси вращения и невесомости стержня, приводит к равенству

$$F_1 = F_2.$$

Равноудаленность тел от оси вращения и недеформируемость стержня делают справедливым соотношение

$$a_{1x} = -a_{2x}.$$

Второй закон Ньютона, примененный к легкому стержню, дает равенство

$$F = F_1 + F_2.$$

Решая систему записанных пяти уравнений, находим все искомые величины:

$$a_{1x} = -a_{2x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

$$F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Задача 10. На концах легкой нити, переброшенной через легкий блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, прикреплены тела массами m_1 и m_2 . Найдите ускорения каждого из тел, а также величину силы давления оси на блок.

Очевидно, что рисунок, который следовало бы сделать к этой задаче, полностью совпал бы с рисунком 5, только стержень пришлось бы заменить блоком, диаметр которого равен длине стержня. Весь текст решения задачи 9 тоже может быть использован и в этой задаче. Совпадают, конечно же, и ответы. Единственное и принципиально важное отличие состоит в том, что полученные ответы в задаче 9 применимы только к первому моменту, а в задаче 10 – ко всему времени движения тел.

Таким образом, задачи 9 и 10 демонстрируют весьма своеобразное родство.

Упражнения

1. Тонкое кольцо радиусом R однородно заряжено с положительной линейной плотностью заряда λ . В центре кольца покоится большой точечный положительный заряд q . Найдите величину силы натяжения кольца, вызванной взаимодействием заряженного кольца с точечным зарядом. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать равным k .

2. На мыльной пленке плавает петля из нити. Часть пленки, находившуюся внутри нити, осторожно прокалывают, и нить принимает форму окружности радиусом R . Найдите величину силы натяжения нити, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ .

3. К заряженному конденсатору, обладающему энергией W_0 , присоединяют такой же, но незаряженный конденсатор. На сколько изменится энергия системы конденсаторов?

4. В одно из двух колен U-образной трубки налита жидкость. Вначале колена не сообщаются друг с другом, и энергия жидкости в поле тяжести равна W_0 . На сколько изменится энергия жидкости, когда сообщение колен установится и уровень жидкости в них станет одним и тем же?

5. Шарик, имевший кинетическую энергию W_0 , сталкивается вдоль линии центров абсолютно неупруго с другим таким же, но покоившимся шариком. На сколько изменится кинетическая энергия системы шариков в результате удара?