



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 5 - 1999 г.
Практикум абитуриента

В. Можаяев
Задачи
по атомной и ядерной
физике

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

Задачи по атомной и ядерной физике

А . Ì Î Æ À Å Ä

В НАЧАЛЕ НАШЕГО (УЖЕ УХОДЯЩЕГО) века было установлено, что атом любого химического элемента состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки, электроны которой обращаются вокруг ядра под действием электрических сил. Линейные размеры ядер порядка $10^{-13} - 10^{-12}$ см, а размеры самих атомов, определяемые электронными оболочками, примерно в 10^5 раз больше. Несмотря на малый относительный размер ядра, почти вся масса атома (99,95%) сосредоточена именно в нем. Это связано с тем, что электронная оболочка состоит только из электронов (e), а в состав ядра входят значительно более тяжелые протоны (p) и нейтроны (n): $m_p = 1836,15 m_e$, $m_n = 1836,68 m_e$.

Если строение и свойства электронной оболочки определяются электрическим полем ядра атома, то внутри ядра между нуклонами (протонами и нейтронами) действуют так называемые ядерные силы, которые в сотни раз более сильные, чем электромагнитные.

Атом является чисто квантово-механической системой. Однако и для таких систем выполняются фундаментальные законы сохранения полной энергии и импульса.

А теперь – несколько конкретных задач, в основе которых лежат именно законы сохранения.

Задача 1. На какое минимальное расстояние r могут сблизиться при лобовом столкновении центры α -частицы с кинетической энергией $T = 6$ МэВ и неподвижного ядра золота? Порядковый номер золота $Z_{Au} = 79$, а его массовое число $A_{Au} = 197$.

Будем рассматривать процесс лобового столкновения α -частицы с ядром золота в системе координат, в которой ядро золота первоначально покоилось. Очевидно, что при максимальном сбли-

жении α -частицы и ядра в этой системе координат они будут двигаться как единое целое с некоторой скоростью v . Запишем законы сохранения полной энергии и импульса для данной системы частиц. Поскольку кинетическая энергия α -частицы много меньше ее энергии покоя ($m_\alpha c^2 = 3730$ МэВ), полную энергию α -частицы (а тем более ядра золота) можно записать в нерелятивистском виде: как сумму энергии покоя и кинетической энергии.

Полная энергия системы наших частиц, когда они были на большом удалении друг от друга, равна

$$E_1 = m_\alpha c^2 + T + M_{Au} c^2,$$

а импульс этой системы равен

$$p_1 = \sqrt{2m_\alpha T},$$

где m_α – масса α -частицы (т.е. ядра атома гелия), M_{Au} – масса ядра золота, c – скорость света. В момент максимального сближения полная энергия системы составляет

$$E_2 = m_\alpha c^2 + M_{Au} c^2 + \frac{1}{2}(m_\alpha + M_{Au})v^2 + \frac{Z_{He}Z_{Au}e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где e – заряд электрона, r – расстояние между частицами. Импульс же составит

$$p_2 = (m_\alpha + M_{Au})v.$$

Законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(m_\alpha + M_{Au})v^2 + \frac{Z_{He}Z_{Au}e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$$\sqrt{2m_\alpha T} = (m_\alpha + M_{Au})v.$$

Из совместного решения этих уравнений найдем минимальное расстояние

между частицами:

$$r = \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{Au}}\right) \frac{Z_{He}Z_{Au}e^2}{4\pi\epsilon_0 T} = \left(1 + \frac{A_{He}}{A_{Au}}\right) \frac{Z_{He}Z_{Au}e^2}{4\pi\epsilon_0 T} \approx 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Задача 2. Используя модель Бора для атома водорода, найдите дискретные уровни энергий и классические радиусы орбит электрона для водородоподобного атома (водородоподобным атомом называют ион с зарядом ядра Ze , вокруг которого вращается один электрон). Вычислите потенциал ионизации для атома водорода и радиус первой боровской орбиты.

Пусть масса ядра иона M_j , а масса электрона m_e . Между ионом и электроном действует электростатическая сила, и они вращаются по круговым орбитам относительно их общего центра масс. Если радиус орбиты ядра r_j , а радиус орбиты электрона r_e , то эти радиусы связаны между собой соотношением

$$M_j r_j = m_e r_e. \quad (1)$$

Уравнение движения электрона в системе центра масс имеет вид

$$\frac{m_e v_e^2}{r_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)^2}, \quad (2)$$

где v_e – скорость электрона. Отсюда следует, что кинетическая энергия электрона равна

$$T_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{Ze^2 r_e}{8\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)^2}.$$

Аналогично, для ядра получаем

$$T_j = \frac{M_j v_j^2}{2} = \frac{Ze^2 r_j}{8\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)^2}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия иона составляет

$$T = T_e + T_j = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)}.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия между ядром и электроном равна

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)},$$

а полная энергия иона –

$$E = T + U = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 (r_e + r_j)}. \quad (3)$$

До сих пор мы пользовались чисто классическими представлениями. Теперь воспользуемся правилом квантования момента импульса для нашего иона: суммарный момент импульса системы электрон-ядро кратен постоянной Планка $\hbar$, т.е.

$$m_e v_e r_e + M_y v_y r_y = n\hbar,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку импульс иона равен нулю, $m_e v_e = M_y v_y$ и, следовательно,

$$m_e v_e (r_e + r_y) = n\hbar. \quad (4)$$

Исключая скорость электрона v_e из уравнений (2) и (4), найдем возможные значения радиусов орбит электрона:

$$r_{en} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m_e} n^2, \quad (5)$$

а из уравнений (1) и (5) найдем возможные радиусы орбит ядра:

$$r_{yn} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 M_y} n^2.$$

Если говорить об орбитах электрона в системе координат, связанной с ядром, то

$$r_n = r_{en} + r_{yn} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2} n^2 \frac{m_e M_y}{m_e + M_y} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \mu} n^2, \quad (6)$$

где $\mu = \frac{m_e M_y}{m_e + M_y}$ — так называемая приведенная масса. Подставляя полученное выражение (6) в формулу (3), получим дискретные значения полной энергии стационарных состояний иона:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Потенциалом ионизации атома называют минимальную энергию, необходимую для перевода атома из нормального состояния ($n = 1$) в несвязанное состояние ($n \rightarrow \infty$). Для атома водорода

где $Z = 1$, $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$, где m_p — масса протона, поэтому потенциал ионизации атома водорода равен

$$E_i = \frac{m_e m_p e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 (m_e + m_p) \hbar^2} \approx 13,55 \text{ эВ},$$

а радиус первой боровской орбиты (боровский радиус) —

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 (m_e + m_p)}{e^2 m_e m_p} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Заметим, что боровский радиус и потенциал ионизации атома водорода являются характерными масштабами длины и энергии в атомных системах.

Задача 3. *Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг их центра масс. (Позитроний образуется при столкновении медленных нейтронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона.) Найдите уровни энергии, энергию ионизации и минимальное расстояние между электроном и позитроном для позитрония.*

Будем рассматривать позитроний как водородоподобный атом и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Для позитрония $Z = 1$, а приведенная масса $\mu = m_e/2$ (масса позитрона равна массе электрона), поэтому выражение для энергетических уровней позитрония примет вид

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда для энергии ионизации позитрония (при $n \rightarrow \infty$) получим

$$E_i = \frac{m_e e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \approx 6,77 \text{ эВ}.$$

Минимальное расстояние между электроном и позитроном найдем из выражения (6) для радиусов боровских орбит (при $n = 1$):

$$r_{\min} = \frac{8\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 4. *Термоядерная реакция ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{p}$ идет с выделением энергии $Q_1 = 18,4 \text{ МэВ}$ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину Q_1 больше кинетической энергии исходных). Какая энергия Q_2 выделится в реакции ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{p}$, если дефект масс ядра ${}^3_2\text{He}$ на $\Delta M = 0,006 \text{ а.е.м.}$ больше, чем у ядра ${}^2_1\text{H}$?*

Масса покоя любого ядра всегда меньше суммы масс покоя входящих в его состав нуклонов (протонов и нейтронов). Для количественной характеристики этого эффекта вводится специальная величина, называемая дефектом масс, — разность между суммой масс нуклонов, входящих в состав ядра, и массой самого ядра. В ядерной физике массы частиц принято измерять в энергетических единицах. Заданная в условии задачи величина $\Delta M = 0,006 \text{ а.е.м.}$ соответствует энергии $\Delta M c^2 = 5,589 \text{ МэВ}$.

Дефект масс ядра гелия-3 (${}^3_2\text{He}$) равен

$$\Delta M_3 = 2m_p + m_n - M_3,$$

где m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, а M_3 — масса ядра гелия-3. Аналогично запишем дефект масс ядра дейтерия с массой M_2 :

$$\Delta M_2 = m_p + m_n - M_2.$$

Из этих уравнений получим

$$\Delta M_3 - \Delta M_2 = \Delta M = m_p + M_2 - M_3.$$

Теперь рассмотрим данные термоядерные реакции. Так как число нуклонов в обеих реакциях не изменяется, энерговыделение в реакциях обусловлено изменением дефектов масс участвующих в реакции ядер. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$M_2 c^2 + M_3 c^2 = M_4 c^2 + m_p c^2 + Q_1,$$

$$M_3 c^2 + M_3 c^2 = M_4 c^2 + 2m_p c^2 + Q_2,$$

где M_4 — масса ядра гелия-4. Вычитая уравнения одно из другого, найдем искомую энергию:

$$Q_2 = Q_1 - (m_p c^2 + M_2 c^2 - M_3 c^2) = Q_1 - \Delta M c^2 \approx 12,8 \text{ МэВ}.$$

Задача 5. *Ядерная реакция ${}^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + p$ может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α -частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_{\text{п}} = 1,45 \text{ МэВ}$. На сколько энергия α -частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия обрывающихся протонов могла быть равной нулю? Рассмотрите нерелятивистский случай.*

Поскольку данная реакция может идти только при энергиях, превышающих пороговую, это означает, что реакция идет с поглощением энергии (такие реакции называются эндотермическими). Очевидно, что в этом случае энергии покоя продуктов реакции больше энергии покоя исходных частиц. Обозначим эту разность через Q и назовем энергией реакции.

Рассмотрим случай, когда налетающая α -частица обладает кинетической энергией, равной пороговой энергии $E_{\text{п}}$, т.е. когда $p_{\alpha}^2 / (2m_{\alpha}) = E_{\text{п}}$, где p_{α} — импульс α -частицы, а m_{α} — ее масса. В этом случае продукты реакции будут двигаться как единое целое, т.е. с одной и той же скоростью, которую обозначим через u . Запишем закон сохранения энергии:

$$E_{\text{п}} = \frac{M_{\text{O}} u^2}{2} + \frac{m_p u^2}{2} + Q$$

и закон сохранения импульса:

$$\sqrt{2m_{\alpha}E_{\pi}} = (M_{\text{O}} + m_p)u,$$

где M_{O} – масса ядра атома кислорода, а m_p – масса протона. Исключая из уравнений скорость u , получим

$$Q = E_{\pi} \left(1 - \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{O}} + m_p} \right).$$

Пусть теперь кинетическая энергия α -частицы T_{α} больше E_{π} , а образовавшийся в результате реакции протон неподвижен. Законы сохранения энергии и импульса в этом случае будут иметь вид

$$T_{\alpha} = \frac{M_{\text{O}}v^2}{2} + Q, \quad \sqrt{2m_{\alpha}T_{\alpha}} = M_{\text{O}}v,$$

где v – скорость ядра атома кислорода. После исключения из этих уравнений скорости v , получим

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= Q \frac{M_{\text{O}}}{M_{\text{O}} - m_{\alpha}} = \\ &= E_{\pi} \frac{M_{\text{O}}(M_{\text{O}} + m_p - m_{\alpha})}{(M_{\text{O}} - m_{\alpha})(M_{\text{O}} + m_p)}. \end{aligned}$$

Энергия α -частицы будет больше пороговой энергии на величину

$$\begin{aligned} T_{\alpha} - E_{\pi} &= E_{\pi} \frac{m_{\alpha}m_p}{(M_{\text{O}} - m_{\alpha})(M_{\text{O}} + m_p)} \approx \\ &\approx 0,025 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Задача 6. В настоящее время в природном уране содержится $\eta_1 = 99,28\%$ урана-238 и $\eta_2 = 0,72\%$ урана-235. Вычислите возраст Земли в предположении, что в момент ее образования количества обоих изотопов урана были одинаковыми. Периоды полураспада ядер ^{238}U и ^{235}U равны, соответственно $\tau_1 = 4,56 \cdot 10^9$ лет и $\tau_2 = 0,71 \cdot 10^9$ лет.

Воспользуемся основным законом радиоактивного распада

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

где $N(t)$ – число нераспавшихся ядер через произвольное время t после начала отсчета, N_0 – число нераспавшихся ядер в момент начала отсчета, τ – период полураспада данных ядер. В нашем случае за начало отсчета времени мы выбираем момент образования Земли. Пусть N_0 – число ядер каждого изотопа в природном уране на момент образования Земли, тогда число этих ядер в настоящий момент t равно

$$N_1(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_1} \text{ и } N_2(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_2}.$$

Поделив одно равенство на другое, получим

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = 2^{t \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right)}.$$

Прологарифмировав обе части данного уравнения, найдем возраст Земли:

$$t = \frac{\ln(\eta_1/\eta_2)}{\ln 2} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ лет}.$$

Упражнения

1. В 1989 году впервые наблюдалось образование протонииума – атома, состоящего из протона и антипротона (частица с массой протона и зарядом, равным по величине и по знаку заряду электрона). Определите энергию излучения, соответствующую переходу протонииума из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

2. При слиянии протона и ядра трития образуются α -частица (ядро атома гелия) и γ -квант: $^1_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + \gamma$. Дефект масс ядра ^4_2He составляет 0,0304 а.е.м. (1 а.е.м. соответствует энергии 931,5 МэВ). Кинетическая энергия частиц, образующихся в реакции $^3_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + 2^1_0n$, на 11,3 МэВ больше кинетической энергии исходных частиц. Определите энергию, уносимую γ -квантом в первой реакции. Кинетическими энергиями протона, ядра трития и α -частицы можно пренебречь.

3. При захвате нейтрона ядром лития происходит ядерная реакция $^6\text{Li} + n = ^3\text{H} + ^4\text{He}$, в которой выделяется энергия $Q = 4,8$ МэВ. Найдите распределение кинетической энергии между продуктами реакции. Кинетическую энергию исходных частиц считайте пренебрежимо малой.

4. Определите энергию, уносимую за 1 час α -частицами, получающимися при распаде 1 г радия (^{226}Rd), если скорость α -частиц равна $1,51 \cdot 10^9$ см/с, а период полураспада радия составляет 1602 года.