117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой “Квант”).

№ 5 - 1999 г.

Физпрактикум

А . Черноуцан

ДАВЛЕНИЕ ПОЛЯ

Давление поля

À. ×ÅÐÍÎÓÖÀÍ

Увидев название статьи, читатель, возможно, подумает, что речь пойдет о давлении света (электромагнитного поля). Это явление обсуждается в школьном курсе. Его объяснение становится особенно понятным, если рассматривать свет как поток фотонов, каждый из которых обладает определенным импульсом. При отражении от тела или поглощении им фотонов происходит изменение их импульса, а это означает, что на тело действует сила давления. При таком подходе давление света становится весьма похожим на давление идеального газа, молекулярно-кинетическое объяснение которого также связано с ударами молекул о поверхность. Если же поставить себе цель объяснить давление света, не выходя за рамки электромагнитной теории, то происхождение силы надо связать с воздействием магнитного поля волны на упорядоченно движущиеся заряды вещества, что вызывается другим компонентом волны — ее электрическим полем.

Однако не имеет смысла дальше углубляться в обсуждение давления электромагнитных волн, потому что эта статья посвящена совсем другому явлению — давлению *статического* поля, как электрического, так и магнитного. Понятно, что в этом случае не может быть речи об изменении импульса, поэтому сам термин «давление» можно считать условным. Тем не менее в научно-популярных статьях и книгах вы можете встретиться с таким понятием. Читая, например, о создании сверхсильного магнитного поля, можно узнать, что одну из основных проблем представляет давление этого поля на стенки соленоида. Это тесно связано с возможностью создания управляемого термоядерного синтеза, где встает задача удержания раскаленной плазмы сильным магнитным полем («магнитной ловушкой»). Однако начнем мы не с магнитного поля, а с более понятного школьнику — поля электростатического.

Давление электрического поля

Разберемся с механизмом возникновения давления электростатического поля на заряженную поверхность, которое возникает в том случае, если напряженности полей по разные стороны этой поверхности различны. Начнем, как всегда, с самого простого случая — заряженного плоского конденсатора. Напряженность поля внутри конденсатора равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = q/S$ — поверхностная плотность заряда. При вычислении силы, действующей на единицу площади одной из пластин, надо учитывать только поле другой пластины, равное $E/2$ (сама на себя пластина не действует):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{E}{2}\sigma = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Обсудим полученный результат.

Во-первых, давление выражается через напряженность поля, существующего с одной стороны от пластины (поле вне конденсатора пренебрежимо мало). Во-вторых, сила, действующая на пластину, направлена внутрь конденсатора – пластины притягиваются. Это значит, что если мы хотим приписать электрическому полю давление, то мы должны считать это давление *отрицательным* (поле не «давит», а «тянет»!). И, наконец, в-третьих, давление поля совпадает по величине с объемной плотностью электрического поля. В итоге можно написать

$$p = -w = -\frac{W}{V} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (1)$$

Перечисленные свойства становятся вполне естественными, если посмотреть на них с точки зрения закона сохранения энергии. Рассмотрим изолированный (отключенный от источника) плоский конденсатор. Прикладывая внешнюю силу, медленно увеличим расстояние между пластинами на Δx. Поскольку напряженность поля между пластинами не изменится (она зависит только от σ), энергия поля увеличится на $wS\Delta x$. Следовательно, внешняя сила должна совершить положительную работу $F\Delta x$, а сила давления поля — отрицательную работу $-pS\Delta x$. Таким образом, давление поля должно быть отрицательным и равным объемной плотности энергии.

Формула (1) действует и в случае заряженной поверхности любой формы, если напряженность поля по одну сторону от нее равна нулю. Важный пример: на участок поверхности проводника площадью ΔS, возле которого напряженность поля равна E, действует наружу сила, равная $\Delta F = \left(\varepsilon_0 E^2/2\right)\Delta S$. Не останавливаясь на обосновании этого утверждения, обсудим сразу общую формулировку: если по одну сторону от заряженной поверхности напряженность поля равна E_1, а по другую E_2, то в направлении от первой области ко второй действует сила, обусловленная давлением

$$p = \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Эту формулу можно обосновать тремя способами. Самый простой и естественный — энергетический. Надо мысленно сместить поверхность на Δx и приравнять работу внешней силы к изменению энергии поля. (Работа силы давления со стороны поля равна работе внешней силы, взятой с противоположным знаком.)

Можно, как и в случае плоского конденсатора, отделить собственное поле от внешнего (рис.1). Будем считать, что оба поля перпендикулярны к заряженной поверхности; действительно, касательная составляющая поля (если она есть) имеет одно и то же значение по обе стороны поверхности (это утверждение следует из потенциальности поля — подумайте сами, каким образом) и сокращается в формуле для давления. Для собственного поля $E_{соб}$ и внешнего поля $E_{вн}$ получим соотношения

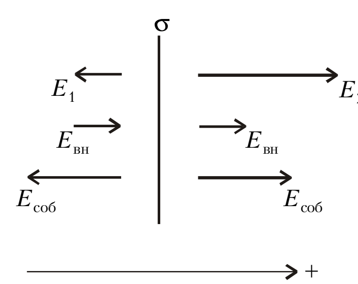

Рис. 1

$$\begin{cases} E_1 = E_{вн} - E_{соб}, \\ E_2 = E_{вн} + E_{соб}. \end{cases}$$

Собственное поле вблизи поверхности неотличимо от поля плоскости, т.е. $E_{\text{соб}} = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Выражая из этих уравнений $E_{\text{вн}}$ и σ:

$$E_{\text{вн}} = \frac{E_1 + E_2}{2},\ \sigma = \varepsilon_0 (E_2 - E_1), \quad (3)$$

найдем давление:

$$p = \sigma E_{\text{вн}}$$

и получим формулу (2).

Чтобы почувствовать, что давление определяется именно полным полем, а разделение поля на внешнее и собственное является только искусственным приемом, рассмотрим силу, действующую на тонкий слой объемного заряда (рис.2). Внутри слоя напряженность плавно меняется от E_1 на одной

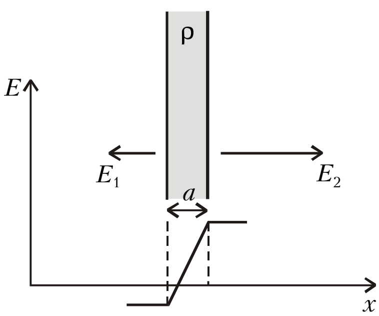

Рис. 2

поверхности до E_2 на другой. Если объемная плотность заряда ρ постоянна, то напряженность поля меняется линейно и сила, действующая на площадку площадью S, выражается через среднюю напряженность поля:

$$F = \sigma S \frac{E_1 + E_2}{2} = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) S \frac{E_1 + E_2}{2} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \right) S,$$

где $\sigma = \rho a$ — заряд единицы поверхности слоя. Связь между σ, E_1 и E_2 можно получить с помощью теоремы Гаусса (если вы знакомы с этой теоремой) или же рассуждениями с внешним и собственным полями, приведшими к формуле (3).

При произвольной зависимости $\rho(x)$ поступим следующим образом. Разделим слой на много тонких слоев толщиной dx и просуммируем силы, действующие на эти слои (рис.3):

$$F = \int_0^a E(x) \rho(x) S dx .$$

Изменение напряженности на очеред-

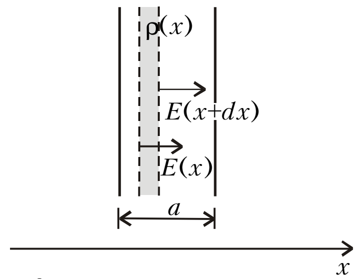

Рис. 3

ном слое равно (для доказательства используйте теорему Гаусса; см. также формулу (3))

$$dE = \frac{\rho dx}{\varepsilon_0} .$$

Для давления получаем

$$p = \frac{F}{S} = \int_1^2 E \varepsilon_0 dE = \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} .$$

Отметим важную особенность: в случае объемного заряда не надо выделять собственное поле. Причина в том, что при уменьшении толщины слоя его собственное поле стремится к нулю.

Давление магнитного поля

В случае магнитного поля мы сталкиваемся с двумя трудностями. Одна из них — чисто методическая. Дело в том, что в обычном (не расширенном) школьном курсе нет формул для магнитной индукции, создаваемой элементом тока (закон Био-Савара), током в прямом проводе, катушкой (соленоидом) с током, а также нет формулы для объемной плотности энергии магнитного поля. Мы ограничимся случаем длинного соленоида (все обобщения проводятся аналогично электрическому полю), поле в котором почти всюду (кроме концов) однородно и равно

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i . \quad (4)$$

Здесь $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2) = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — *магнитная постоянная*, l — длина соленоида, N — число витков, i — *поверхностная плотность тока* (ток на единицу длины), во многом аналогичная поверхностной плотности заряда в электростатике. Направление поля находят по движению буравчика, который вращают в направлении тока. Вычислив магнитный поток в соленоиде $\Phi = NBS$, можно выразить индуктивность $L = \Phi/I$ и энергию соленоида $W = LI^2/2$. Разделив энергию на объем соленоида, получим выражение для объемной плотности энергии магнитного поля (проверьте это):

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Вторая трудность носит принципиальный характер. Как было показано в статье «Осторожно: магнитное поле» (см. «Квант», 1999, №3), неаккуратное применение энергетических соотношений в задачах с магнитным полем может привести к кажущимся парадоксам и противоречиям. С аналогичной ситуацией мы столкнемся и при обсуждении давления магнитного поля.

Вычисление силы, действующей на небольшой прямоугольный участок ΔS поверхности соленоида, проведем с помощью рассуждений, аналогичных электростатике (рис.4). Поле возле поверхности разделим на собственное поле

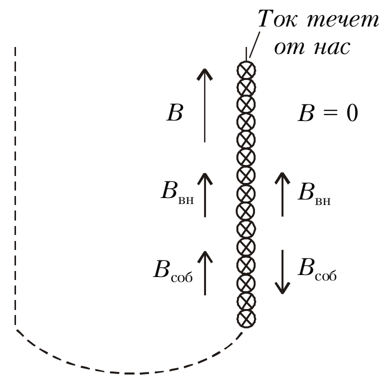

Рис. 4

$B_{\text{соб}}$ (очень близко к поверхности оно должно быть равно полю бесконечной плоскости с током) и внешнее поле $B_{\text{вн}}$ (поле, создаваемое остальными участками соленоида). Получим

$$\begin{cases} B = B_{\text{вн}} + B_{\text{соб}}, \\ 0 = B_{\text{вн}} - B_{\text{соб}}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $B_{\text{вн}} = B_{\text{соб}} = B/2$. Величину силы найдем из закона Ампера (с учетом формулы (4)):

$$\Delta F = B_{\text{вн}} (i \Delta l) \Delta d = \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta S ,$$

где Δl — ширина участка вдоль соленоида, а Δd — его длина вдоль тока.

На первый взгляд все выглядит замечательно и совершенно аналогично электростатике — давление поля численно совпадает с плотностью энергии магнитного поля. Но после определения направления силы по правилу левой руки мы обнаруживаем существенное различие: сила направлена наружу, т.е. давление магнитного поля надо, в отличие от электрического случая, считать *положительным*.

Казалось бы, ничего плохого в этом нет — наоборот, такой ответ лучше согласуется с привычным представлением о давлении. Однако нетрудно обнаружить, что в этом случае немедленно возникают трудности с законом сохранения энергии. Действительно, при мысленном смещении поверхности с током, например, в сторону поля (при уменьшении радиуса соленоида) внешние силы совершают положительную работу против магнитных сил, а объем соленоида, содержащий магнитное поле, уменьшается — значит, уменьшается и энергия поля! Как же объяснить такое противоречие?

Причина в том, что мы не учли работу источника, необходимую для поддержания постоянного тока соленоида, — а только при этом условии величина магнитной индукции в соленоиде не изменится. Дополнительная работа источника должна скомпенсировать работу ЭДС самоиндукции, возникающую при уменьшении магнитного потока в соленоиде. На рассматриваемом участке при смещении внутрь на расстояние Δx изменение потока равно

$$\Delta\Phi = -B\Delta x\Delta d,$$

возникающая на этом участке ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{\text{сам}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

а работа источника против ЭДС самоиндукции равна (с учетом формулы (4))

$$A_{\text{ист}} = -\mathcal{E}_{\text{сам}}\Delta q = -\frac{B\Delta x\Delta d}{\Delta t} i\Delta l\Delta t = -\frac{B^2}{\mu_0}\Delta V,$$

где Δq — заряд, прошедший через этот участок за время Δt. Получаем, что работа внешней силы *вместе* с работой источника в точности равняется изменению энергии!

Для интереса отметим, что с очень похожей ситуацией мы сталкиваемся при записи закона сохранения энергии (первого закона термодинамики) при изобарном изменении объема идеального газа (где давление, конечно, тоже положительно). А удобно рассматривать именно изобарный процесс потому, что в этом случае остается постоянной объемная плотность внутренней энергии газа:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\nu C_V T}{V} = \frac{C_V}{R} p$$

(здесь C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме). Например, при сжатии газа работа внешней силы положительна (работа газа отрицательна), а внутренняя энергия газа уменьшается. Впрочем, в этом случае ответ хорошо известен — от газа отводится ровно столько тепла, сколько надо для баланса энергии. Тепловой резервуар играет тут такую же роль, как источник тока в задаче с соленоидом.