



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1999 г.

А. Левина

Что такое комбинаторика **(окончание)**

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

Что такое комбинаторика

À. ЁААЁ Í À

Что такое счастье

Вернемся к уравнению (6) $(x_1 + x_2 + \dots + x_n = m)$. Уместно посмотреть, что произойдет, если игнорировать порядок слагаемых. Для определенности будем считать слагаемые положительными и рассмотрим следующую задачу.

Задача 13. *Сколькими способами можно разбить число m на n ($\leq m$) натуральных слагаемых, если разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются тождественными?*

Решили? Нет? Это и неудивительно: задача не решается в привычном смысле. Хотелось бы, чтобы, как и ранее, ответ давался в виде явно выписываемой функции $f(m, n)$. Но на этот раз сколько-нибудь «явно» выразить ответ через параметры задачи m, n не удастся.

Разумеется, для любых конкретных чисел m, n мы в принципе можем вычислить численное значение $f(m, n)$ — хотя бы перебором, на худой конец. Например, легко убедиться, что $f(8, 3) = 5$, ибо существует 5 способов разбиения (с точностью до порядка) числа 8 на 3 слагаемых:

$$1 + 1 + 6, 1 + 2 + 5, 2 + 2 + 4, \\ 1 + 3 + 4, 2 + 3 + 3.$$

С помощью компьютера можно быстро вычислять и такие значения, как, например, $f(100, 10)$. Только перебором не стоит заниматься, существует куда более эффективный алгоритм. Полезно заметить, что отождествление разбиений, отличающихся порядком, можно заменить требованием упорядоченности x_i , скажем, в неубывающем порядке:

$$(1 \leq) x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n. \quad (8)$$

Таким образом, $f(m, n)$ есть число решений в натуральных числах сис-

темы, состоящий из уравнения (6) и неравенств (8). Такая переформулировка удобна во многих отношениях; она может помочь и при выборе эффективного алгоритма вычисления f . Разработка и программная реализация алгоритма — а заодно и вычисление $f(100, 10)$ — предоставляется читателю в качестве полезного и интересного самостоятельного задания. Заметим лишь, что алгоритм будет носить рекуррентный характер — от меньших значений параметров к большим.

Относится ли данное задание к комбинаторике или к информатике? К тому и к другому. Можно назвать это компьютерной комбинаторикой. Жаль, что в русском языке пока нет слова «алгоритмика». Оно было бы кстати. (Впрочем, скорее всего, оно появится в недалеком будущем).

Разумеется, для вычислений с $n!$ при заданном n также можно написать программу (причем число операций будет расти вместе с n). Почему же мы относим выражения $n!$,

$\binom{n}{m}$ и т.п. к «явным» аналитическим выражениям в отличие от $f(m, n)$? Обозначения здесь ни при чем: ведь при желании можно и для $f(m, n)$ придумать какое-нибудь специальное обозначение (скажем, $m?n$). Суть в том, что особая простота «факториального» алгоритма и в самом деле позволяет обращаться с факториалами как с аналитическими выражениями — подставлять в формулы и проводить преобразования. Об этом наглядно свидетельствует, например, приводимая ниже выкладка (15). С произвольными программами такое, разумеется, невозможно.

При первом знакомстве с комбинаторикой «нерешаемые» задачи обычно не затрагиваются. Мы нарушили эту традицию, чтобы читатель с самого начала имел правильное

представление о предмете. Он должен почувствовать, что наличие «явного» ответа для комбинаторной задачи с параметрами (т.е. для задачи, в формулировку которой входят буквы) — это удача, счастливый случай, который надо ценить. Такие случаи осуществляются в комбинаторике довольно часто. Но, к сожалению, не всегда.

Знак Σ

Те, кто знаком с этим обозначением, могут данный пункт пропустить. Они ведь и так знают, что эта прописная греческая буква (сигма) является общепринятым символом суммирования. Обычно суммирование идет по одному или нескольким целочисленным индексам. Если индекс пробегает значения «от и до», то нижняя и верхняя границы указываются, соответственно, внизу иверху; в более сложных случаях область изменения индексов обычно указывается под буквой Σ . Вот несколько примеров:

$$1) \sum_{k=1}^n a_k; 2) \sum_k a_k; 3) \sum_{k=1}^n a_k = m; \\ 4) \sum_{j=0}^{\infty} a q^j = \frac{a}{1-q}; 5) \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_{i,j}; \\ 6) \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \geq 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 2}} \frac{1}{n_1! n_2! n_3!}.$$

В случае 1) записана сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (здесь Σ легко заметить многоточием, но так дело обстоит не всегда). В 2) указан индекс суммирования k , но не его границы; они, следовательно, должны быть ясны из контекста. В 3) читатель узнает уже знакомое нам «уравнение дележа» (6), а в 4) — формулу для суммы членов геометрической прогрессии (при $|q| < 1$); здесь число слагаемых, очевидно, бесконечно. В 5) записано выражение

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34},$$

а в 6) – величина

$$\frac{1}{2!0!0!} + \frac{1}{0!2!0!} + \frac{1}{0!0!2!} + \frac{1}{1!1!0!} + \frac{1}{1!0!1!} + \frac{1}{0!1!1!} (= 4, 5).$$

Как видим, в случаях 5) , 6) легко обойтись и без Σ . Но представьте себе, что в 6), например, 2 заменено на 200. Запись с Σ останется столь же короткой, а о «явной» записи (без Σ) даже думать не хочется.

При многоиндексном суммировании довольно часто встречаются «кратные» Σ (Σ под знаком Σ); мы их применять не будем.

Комбинаторика помогает алгебре

Все знают формулу

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Эрудиты помнят также выражения для куба суммы двух слагаемых и для квадрата суммы произвольного числа слагаемых. Но даже из эрудитов мало кто подозревает, что все это – одна и та же формула, вернее, ее частные случаи. Вот она, эта формула:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}. \quad (9)$$

Некоторая сложность выражения является, так сказать, платой за универсальность – ведь формула верна для любых натуральных m и n . Суммирование в (9) ведется по всем целочисленным кортежам, удовлетворяющим указанным условиям.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что при $n = 2$ (9) переходит в обычную формулу для квадрата суммы. Такая проверка, конечно, не заменяет обоснования, которым мы теперь и займемся.

Тот факт, что правая часть (9) является суммой членов вида

$$cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \quad (k_1, \dots, k_m \geq 0, k_1 + \dots + k_m = n),$$

ясен. Все дело в том, чтобы найти коэффициент c (зависящий, конечно, от $k_1, \dots, k_m$).

Чтобы не утомлять читателя суетой с индексами, затемняющей суть дела, мы, как и ранее, ограничимся частным случаем. Основная идея

очевидным образом переносится на общий случай.

Примем для определенности $m = 3$, $n = 7$ и найдем коэффициент при $x^2 y^2 z^3$ в выражении

$$(x + y + z)^7, \quad (10)$$

или, точнее, в выражении, которое получится после возведения в степень и приведения подобных членов.

Забудем временно о показателях степени и запишем (10) в виде произведения 7 скобок

$$(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z). \quad (11)$$

Выполняя почленное умножение без изменения порядка сомножителей, мы будем получать произведения, выглядящие как слова. Скажем, если в каждой скобке берется первое слагаемое, получим $xxxxxx$. Нас, однако, сейчас интересуют произведения, куда x , y и z входят сомножителями 2, 2 и 3 раза соответственно. Например, произведение

$$yxxzzzy,$$

которое получается, если в первой скобке берется второе слагаемое, во второй и третьей – первое и т.д. Сколько будет слагаемых этого типа?

Знакомая ситуация, не правда ли? Помните, мы переставляли буквы слова КОЛОКОЛ и нашли, что таким образом можно получить

$$\frac{7!}{2!2!3!} = 210 \text{ различных слов (перестановки с повторениями)?}$$

Теперь у нас вместо К, Л, О буквы x , y , z . Разумеется, на ответ это не влияет. Итак, соответствующее слагаемое имеет вид

$$\frac{7!}{2!2!3!} x^2 y^2 z^3 = 210 x^2 y^2 z^3.$$

Мы получили (для $m = 3$, $n = 7$) одно из слагаемых в правой части (9). Все остальные получаются точно так же.

Да, кстати, а сколько всего этих слагаемых? Конечно же, слагаемых ровно столько, сколько решений в целых числах $k_i \geq 0$ у нашего любимого уравнения $k_1 + \dots + k_m = n$, т.е.

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

$$\binom{9}{2} = 36 \text{ слагаемых.}$$

Кому-то наши скоростные способы «возведения в степень без возведения в степень» могут показаться

сомнительными. Что ж, скептики могут, например, честно перемножить скобки в (11), привести подобные и непосредственно проверить, сколько получится слагаемых и каков окажется коэффициент при $x^2 y^2 z^3$.

По-человечески жаль их, конечно. Все-таки седьмая степень. Почти наверняка где-то собоются, надо будет искать ошибку, исправлять... чтобы после всех трудов «причистить», наконец, к числам 36, 210, которые мы нашли, можно сказать, устно.

Любимая формула Коровьева (бином Ньютона)

«Подумаешь, бином Ньютона», – говаривал небезызвестный Коровьев, вице-премьер еще более небезызвестного Воланда. Что, собственно, он имел в виду?

Смысл ясен – это, мол, не проблема. Но все-таки: что за бином такой?

А это просто частный случай формулы (9) при $m = 2$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \quad (12)$$

Кстати, бином в переводе значит двучлен (а речь здесь идет именно о степени двучлена). Теперь читателю ясно, почему числа сочетаний обычно называют биномиальными коэффициентами.

Для примера возьмем, скажем, $n = 4$:

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4. \quad (13)$$

Разумеется, для столь малого n (=4) тот же результат легко получить простым возведением в степень – например, возведя в квадрат $x^2 + 2xy + y^2$. Суть биномиальной формулы (12) именно в том, что она дает ответ непосредственно, без обращения к низшим степеням. То же относится и к более общей формуле (9) (ее иногда называют полиномиальной).

Следующая таблица известна как арифметический треугольник, или

треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Если считать верхнюю строку нулевой, то в n -й строке стоят (в естественном порядке) коэффициенты разложения $(x + y)^n$. Например, четвертую строку образуют коэффициенты в правой части (13). Ясно, что таблицу можно продолжать неограниченно.

Данное расположение биномиальных коэффициентов обладает очень симпатичным свойством: каждый элемент таблицы (кроме окаймляющих единиц) есть сумма двух, стоящих непосредственно над ним. Соответствующее равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (14)$$

можно доказать тремя простыми способами.

Во-первых, прямой выкладкой:

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \\
 &= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \\
 &= (n-1)! \left(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right) = \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Во-вторых, при помощи комбинаторных соображений: число k -подмножеств n -множества, т.е. $\binom{n}{k}$, есть число k -подмножеств, содержащих какой-либо фиксированный элемент, т.е. $\binom{n-1}{k-1}$, плюс число k -подмножеств, не содержащих того элемента, т.е. $\binom{n-1}{k}$.

Третий способ – приравнивание коэффициентов при $x^{n-k}y^k$ в тождестве

$$(x + y)^n = (x + y)^{n-1}(x + y).$$

Конечно, для доказательства (14) вполне достаточно одного способа. Но для решения более сложных задач полезно уяснить связь между разными подходами.

До сих пор для вычисления $\binom{n}{k}$ у нас была формула (5), основанная на операциях умножения и деления. Треугольник Паскаля показывает, между прочим, что можно обойтись только операциями сложения (натуральных чисел). Требуемое число операций не слишком велико (кстати, найдите его), хотя и заметно больше, чем в формуле (5).

Помимо (14), имеется ряд других любопытных закономерностей. Скажем, сумма элементов n -й степени равна 2^n . Действительно, она равна $(x + y)^n$ при $x = y = 1$. Далее, в каждой строке (кроме нулевой) суммы элементов на четных и на нечетных местах совпадают. Для первой, третьей и т.д. строк это очевидно из соображений симметрии (одинаковые слагаемые в обеих суммах). Но, например, и для четвертой строки имеем $1 + 6 + 1 = 4 + 4$, хотя слагаемые различны. Почему бы это? Ключ к разгадке – та же биномиальная формула.

В общем, арифметический треугольник заслуживает того, чтобы изучить его вдоль и поперек. Да и наискосок тоже.

Ал-Каши и школьники

Комбинаторные понятия и, в частности, биномиальные коэффициенты встречаются в математике на каждом шагу. В связи с этим возникает пикантный вопрос об отношении к комбинаторике авторов наших школьных программ и учебников. Если, конечно, полное игнорирование можно считать отношением.

Важность комбинаторики была осознана давно. Бином Ньютона и треугольник Паскаля, вопреки названию, были известны до Ньютона и Паскаля. Например, в начале XV века самаркандский математик и астроном ал-Каши написал общедоступный учебник элементарной математики «Ключ к арифметике». Наряду с десятичными дробями, извлечением корней и т.п. там приводились биномиальные коэффициенты и арифметический треугольник.

Для постановки образования на Руси усилия ал-Каши не могли иметь

заметных последствий. Не до науки было – смуты, междоусобицы, монголы... Да и вдобавок объединитель Руси Иван III к тому времени еще и родиться-то не успел.

С тех пор прошло без малого шесть веков. А выпускники наших школ знают о комбинаторике примерно столько же, сколько во времена монгольского ига. Вот разве что само название бинома Ньютона знакомо теперь многим школьникам. Да и то благодаря роману «Мастер и Маргарита»!

Несколько слов об операциях над множествами

Вообще-то эта тема заслуживает более чем нескольких слов, но мы коснемся ее лишь по мере надобности. К тому же для большинства читателей, вероятно, тема эта не нова.

Простейшая операция над множеством A – образование его дополнения $\bar{A}$, т.е. множества, состоящего из всех элементов, не принадлежащих A (при этом предполагается наличие некоторого «объемлющего» множества B , для которого A и $\bar{A}$ – подмножества). Мы по существу уже пользовались понятием дополнения, когда переходили к множеству «не-нужных» объектов. При этом применялось очевидное соотношение $|A| + |\bar{A}| = |B|$. Здесь и далее через $|C|$ обозначается количество элементов множества C (мы рассматриваем лишь конечные множества).

Объединением

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

множеств $A_1, \dots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A_1, \dots, A_m$. Пересечением

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

$$\text{или просто } A_1 A_2 \dots A_m$$

множеств $A_1, \dots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих всем множествам $A_1, \dots, A_m$.

Если, например, A_1 – множество четных цифр, т.е. $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, A_2 – множество цифр, кратных трем, т.е. $A_2 = \{0, 3, 6, 9\}$, то

$$A_1 \cup A_2 = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A_1 A_2 = \{0, 6\},$$

$$|A_1 \cup A_2| = 7, |A_1 A_2| = 2.$$

Далее используются некоторые очевидные свойства операций объе-

динения и пересечения – например, независимость их от порядка $A_1, \dots, A_m$, а также свойства типа

$$AA = A,$$

$$A(B \cup C \cup \dots \cup D) = AB \cup AC \cup \dots \cup AD.$$

(Принимается, что пересечение связывает сильнее, чем объединение, т.е., например, $AB \cup AC = (AB) \cup (AC)$.)

Теперь мы можем так записать принцип сложения: если множества $A_1, \dots, A_m$ попарно не пересекаются (т.е. $|A_i A_j| = 0$ при всех $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$), то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{i=1}^m |A_i|. \quad (16)$$

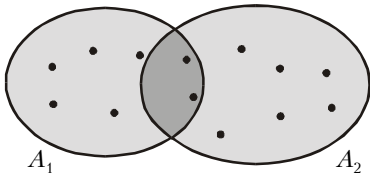
Конечно, этот факт очевиден, как его ни записывай. Но попарно пересекающиеся множества – это очень частный (и очень простой) случай. Можно ли получить аналог формулы (16) для общего случая? Да, и в нескольких формах. Нас будет особенно интересовать одна из них (не использующая дополнений к $A_1, \dots, A_m$).

Слабонервных просят не читать (формула включений и исключений)

Случай $m = 2$, впрочем, рекомендуется всем, даже слабонервным. Действительно, при $m = 2$ формула, о которой идет речь, имеет вполне симпатичный вид

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 A_2|. \quad (17)$$

Ее и доказывать-то не надо, достаточно взглянуть на рисунок:



$|A_1 \cup A_2|$ – количество точек (элементов) во всей заштрихованной области. Складывая $|A_1|$ и $|A_2|$, мы дважды засчитываем точки из области с двойной штриховкой, т.е. из $A_1 A_2$. Поэтому вычитание $|A_1 A_2|$ все ставит на свои места.

Итак, элементы $A_1 A_2$ сначала «включаются» в сумму избыточным образом, затем это исправляется соответствующим «исключением».

Отсюда и название формулы. В общем случае она выглядит довольно устрашающе, и мы предлагаем ее лишь для читателей не робкого десятка:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = & \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i A_j| + \\ & + \sum_{i < j < k} |A_i A_j A_k| - \dots + (-1)^{m+1} |A_1 A_2 \dots A_m| \end{aligned} \quad (18)$$

(все индексы суммирования меняются между 1 и m).

При $m = 2$ получается, конечно, (17), где в правой части всего 3 слагаемых. Сколько же вообще слагаемых (того или иного знака) в «сумме сумм», стоящей в правой части? Столько же, сколько непустых подмножеств у m -множества, т.е. $2^m - 1$. Если, скажем, $m = 30$, то слагаемых уже больше миллиарда. А ведь чтобы найти каждое слагаемое, надо определить число элементов, общих для какого-то набора из множеств $A_1, \dots, A_m$. Неужели столь громоздкая уродливая формула может быть полезной?

Вопрос, понятно, риторический. Для чего же еще мы стали бы ее приводить – ради красоты, что ли?

В задачниках часто можно найти примеры применения формулы (18) наподобие следующего.

Задача 14. Ученики некоторого класса занимаются только тремя видами спорта – бегом, плаванием и теннисом. Бегом всего занимается 10 человек, плаванием – 13, теннисом – 11, бегом и плаванием – 4, бегом и теннисом – 5, плаванием и теннисом – 6, бегом, плаванием и теннисом – 2. Сколько учеников данного класса занимается спортом?

Для решения применим формулу (18). Если множество учеников, занимающихся бегом, обозначить через A_1 , плаванием – через A_2 и теннисом – через A_3 , то искомая величина есть

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ &- |A_1 A_2| - |A_1 A_3| - |A_2 A_3| + |A_1 A_2 A_3| = \\ &= 10 + 13 + 11 - 4 - 5 - 6 + 2 = 21. \end{aligned}$$

Все правильно, но в полезности формулы (18) подобные примеры не очень убеждают. Как-то трудно поверить, что лица, обладающие столь детальной информацией о занятости

учеников всевозможными комбинациями видов спорта, почему-то не знают, сколько же учеников занимается спортом, и обращаются за помощью к нам – т.е. к формуле включений и исключений. Намного более интересное приложение будет рассмотрено в следующем разделе.

Мы увлеклись обсуждением формулы (18) и едва не забыли про доказательство. С применением индукции оно оказывается довольно простым. Пусть формула уже доказана для $m' = 2$ и $m' = m - 1$. Полагая $A_1 \cup \dots \cup A_{m-1} = B$, находим

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_m| &= |B \cup A_m| = \\ &= |B| + |A_m| - |BA_m| = \\ &= |B| + |A_m| - |A_1 A_m \cup \dots \cup A_{m-1} A_m| = \\ &= \sum_{i < m} |A_i| + |A_m| - \sum_{i < j < m} |A_i A_j| - \\ &- \sum_{i < m} |A_i A_m| + \dots = \\ &= \dots \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i A_j| + \dots \end{aligned}$$

Полезная все-таки вещь – индукция!

Число перестановок, имеющих неподвижные элементы

Рассмотрим $3! = 6$ возможных перестановок чисел 1, 2, 3:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

В первой из них все три числа стоят на своих местах («неподвижны»). Во второй есть один такой элемент (1); также по одному неподвижному элементу имеют третья (3) и шестая (2). В четвертой и пятой перестановках неподвижных элементов нет.

Рассмотрим вопрос: сколько из $m!$ перестановок чисел 1, 2, ..., m имеют неподвижные элементы?

Для $m = 3$ ответ, как мы видели, 4 (для $m = 2$ такая перестановка, очевидно, одна). Вручную нетрудно решить задачу перебором для случая $m = 4$; при $m = 5$ возникает мысль о применении компьютера. В самом деле, даже при m порядка 10 – 12 (когда перебор вручную нереален) компьютерный перебор не занимает много времени. Но уже при $m = 20$ перебор $20!$ перестановок недоступен для компьютеров. Надо, стало быть, искать какие-то более действенные средства подсчета. Други-