



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1999 г.

**Материалы
вступительных экзаменов 1999 года
(МФТИ, МГИЭМ, МПГУ)**

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x - \sin x}{\cos 5x - \sin 3x} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x^2 - |x| - 12}{x + 3} > 0.$$

4. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D . Найдите стороны параллелограмма, если его площадь $S = \sqrt{2}$,

$$\text{а } \angle BAC = \arcsin \frac{1}{3}.$$

5. Найдите все пары целых чисел x, y , для которых верны неравенства $3y - x < 5$, $x + y > 26$, $3x - 2y < 46$.

6. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a , точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F — центр грани ABC . Найдите: а) угол между прямыми BC и KE ; б) расстояние между этими прямыми; в) радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F .

Вариант 2

1. Найдите решения $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1, \\ \log_3\left(1 - \frac{2}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - y < 0$.

2. Решите уравнение

$$2 + \sqrt{3} \sin 2x - |\cos 2x| = 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^2 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geq 3x - 10.$$

4. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке M . Прямая, проходящая через M параллельно AC , пересекает AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите MQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB , если $AC = 4$, а $\angle ACB = \arctg(2\sqrt{2})$.

5. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 \geq 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: а) первому неравенству системы; б) первым двум неравенствам системы; в) всем трем неравенствам системы.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2 \cdot ES$, $SF = 5 \cdot DF$. Через точки E и F проведена плоскость α , параллельная CD . Найдите: а) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α ; б) радиус сферы с центром в точке A , касающейся плоскости α ; в) угол между плоскостью α и плоскостью ABC .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту в точке O закреплена нить длиной l ; к другому концу нити привязан небольшой шарик (рис.1). В начальный момент шарик находится в положении равновесия в точке A . Какую минимальную скорость надо сообщить шару в точке A вдоль наклонной плоскости в горизонтальном направлении, чтобы

шарик совершил полный оборот, двигаясь по окружности?

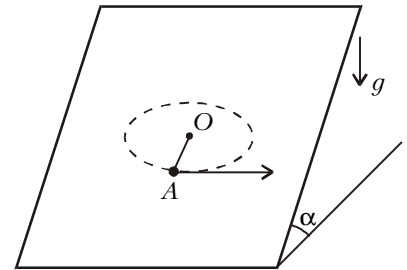


Рис. 1

2. Летним днем перед грозой плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 м^3) равна $\rho = 1140 \text{ г/м}^3$ при давлении $p = 100 \text{ кПа}$ и температуре $t = 30^\circ \text{C}$. Найдите отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению воздуха. Принять, что молярные массы воздуха и пара равны $M_v = 29 \text{ г/моль}$ и $M_w = 18 \text{ г/моль}$ соответственно; универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

3. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$, резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10 \text{ Ом}$ и $R_2 = 30 \text{ Ом}$, замыкают ключ K (рис.2). 1) Найдите ток

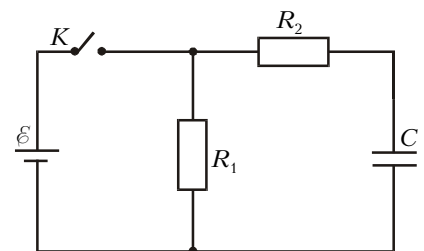


Рис. 2

через резистор R_2 сразу после замыкания ключа. 2) Найдите ток через батарею в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}/3$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого

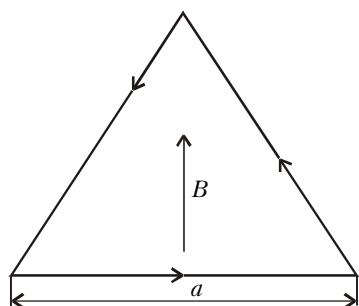


Рис. 3

перпендикулярны одной из сторон рамки (рис.3). Масса рамки M , величина индукции B . Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

5. Часовщику необходимо рассматривать детали часов, размеры которых в $N = 3$ раза меньше, чем то минимальное расстояние между двумя точками, которое он может рассмотреть с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см. Чему равно максимальное фокусное расстояние линзы (собирающая линза), которую он должен использовать, чтобы рассмотреть эти детали? При использовании линзы глаз наблюдателя аккомодирован на бесконечность, а рассматриваемые предметы расположены в фокальной плоскости линзы.

Вариант 2

1. Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жесткой рамы. Длина рамы L , масса m . Рама пружинной жесткостью k соединена с непод-

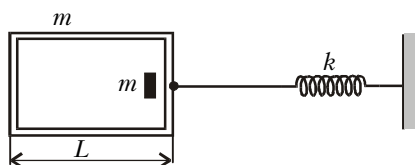


Рис. 4

вижной опорой (рис.4). Раму отводят направо так, что брусок касается ее левой стенки, и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения. 1) Найдите скорость бруска сразу после первого столкновения с рамой. 2) Найдите период колебаний бруска.

2. Брусок может двигаться поступательно по прямолинейным горизонтальным салазкам, не отрываясь от них. На бруске укреплен в вертикальной плоскости, параллельной салазкам, желоб радиусом R , по которому может скользить без трения неболь-

шой по размерам шарик массой m (рис.5). Масса бруска с желобом $6m$. Вначале брусок покоился. Шарик в верхней точке желоба сообщили горизонтальную скорость v_0 . 1) Найдите скорость бруска при прохождении шариком нижней точки желоба. 2) На

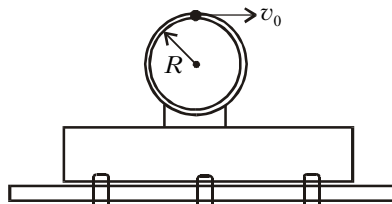


Рис. 5

каком расстоянии от первоначального положения окажется брусок через время t_0 , когда шарик совершит несколько оборотов и окажется в нижней точке желоба?

3. Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры газа $\Delta T/T$ малы. Найдите работу, совершенную газом, если относительное изменение его давления равно $\Delta p/p = -1/120$.

4. В схеме, изображенной на рисун-

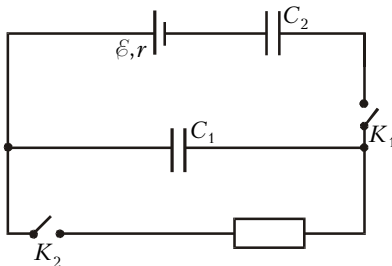


Рис. 6

ке 6, при разомкнутых ключах K_1 и K_2 конденсаторы с емкостями C_1 и C_2 не заряжены. ЭДС батареи ε , внутреннее сопротивление r . Сначала замыкают ключ K_1 , а после установления стационарного состояния в схеме замыкают ключ K_2 . 1) Чему равен ток через батарею сразу после замыкания ключа K_1 ? 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключа K_2 ?

5. Если рассматривать свое изображение в плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной $H = 10$ см, то можно увидеть ряд последовательных изображений лица, отстоящих друг от друга на $L = 14$ см. Чему равен показатель преломления стекла пластинки?

Публикацию подготовили
В.Трушин, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный
институт электроники
и математики
(технический университет)

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматике и вычислительной техники)

1. Решите относительно x уравнение

$$\frac{2x - a - 2}{x^2 + ax - 2a^2} + \frac{4a + 3}{x + 2a} = 2.$$

2. Решите неравенство

$$(6x^2 - 11x - 7) \log_5(x - 2) > 0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_9(15 \sin x + 9 \cos 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(4 \cos x) = 0.$$

4. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная 6, составляет угол 30° с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

5. В двух группах более 52 студентов. Известно, что число студентов первой группы превышает число студентов второй группы уменьшенное на 21, более чем в два раза, а число студентов второй группы более чем в пять раз превышает число студентов первой группы, уменьшенное на 16. Сколько студентов в каждой из групп?

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2ax + y = -3, \\ x + 2ay = 3. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_{2x-3}(3x^2 - 6x + 2) > 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3 - 4 \sin 2x} (3 \cos 2x + \sin x - 2) = 0.$$

4. Сторона AB пятиугольника $ABCDE$, у которого углы A и B — прямые, служит диаметром окружности, касающейся сторон ED и DC . Радиус окружности равен R , угол $EOA = 30^\circ$, угол COB равен α (O — центр окружности). Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$ и определите значение угла α , при котором эта площадь минимальна.

5. а) При $a = 6$ решите неравенство

$$\log_{|2a|}(3x^2 + ax) < 2.$$

6) Найдите все значения a , при каждом из которых данное неравенство выполняется для всех $x \in [-4; -3]$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Чаша в форме полусферы с радиусом R вращается вокруг вертикальной оси (рис.1). В чаше находится небольшое тело, радиус-вектор кото-

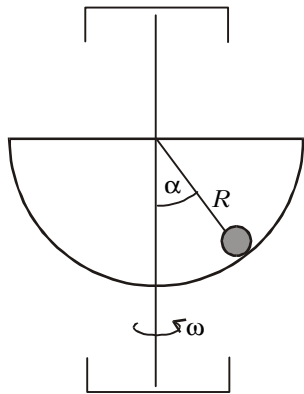


Рис. 1

рого составляет при вращении угол α с вертикалью. С какой угловой скоростью ω должна вращаться чаша, чтобы тело не соскальзывало, если коэффициент трения покоя равен μ ?

2. Две частицы массами m и $2m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями v и $v/4$ соответственно. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определите выделившееся при ударе количество теплоты.

3. В начальный момент времени смещение частицы $x_0 = 1,7$ см, а скорость $v_0 = -1$ м/с. Масса частицы $m = 0,4$ кг, ее полная энергия $W = 800$ мДж. Напишите закон колебаний частицы и определите путь, пройденный частицей за время $t = 0,1\pi$ с.

4. Шарик, подвешенный на пружине, опускают в воду. Растяжение пружины при этом уменьшается в $n = 1,6$

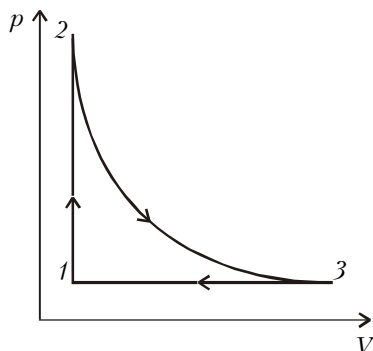


Рис. 2

раза. Определите плотность материала шарика.

5. Определите КПД цикла (рис.2), совершаемого $\nu = 3$ моль одноатомного идеального газа и состоящего из изохоры, адиабаты и изобары, если известно, что газ получил $Q = 3000$ Дж тепла и в результате адиабатного расширения температура его понизилась на $\Delta T = 40$ К.

6. Определите количество теплоты, выделившееся в резисторе R_3 при пе-

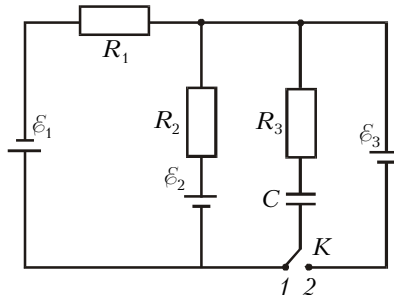


Рис. 3

реклучении ключа K из положения 1 в положение 2 (рис.3). Внутренние сопротивления всех источников одинаковы и равны $r = 1$ Ом, ЭДС источников составляют $\varepsilon_1 = 4$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В, $\varepsilon_3 = 1$ В. Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 20$ Ом. Емкость конденсатора $C = 1,4$ мкФ.

7. При номинальной нагрузке сила тока в первичной обмотке сварочного трансформатора равна $I_1 = 30$ А. Ее сопротивление $R_1 = 0,1$ Ом. Полагая, что сечения проводов пропорциональны силам тока и обмотки мотаются на сердечник в один слой, определите потери мощности на их нагрев.

8. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 64$ мкГн и конденсатора емкостью $C = 200$ пФ. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 8$ В. Каким будет ток в тот момент, когда энергия контура окажется распределенной поровну между электрическим и магнитным полями? Каков максимальный ток в этом контуре?

9. Отношение скоростей вылетающих электронов при освещении поверхности металла светом с длинами волн λ_1 и λ_2 равно $n = 0,5$. Определите λ_2 , если $\lambda_1 = 400$ нм и красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{кр} = 600$ нм.

10. Увеличение, даваемое линзой, равно $\Gamma = 5$. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние от нее до предмета $d = 12$ см.

Публикацию подготовили
С.Кашина, В.Тонян

Московский педагогический
государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{|x|} \right) + \log_{|x|} 3 \geq 2.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{6}{\operatorname{ctg} \left(1,5\pi + \frac{x}{3} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} \right)} = \left(\cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3} \right)^2.$$

3. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Напишите уравнения тех касательных к графику этой функции, которые параллельны прямой $2x - y + 5 = 0$.

4. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $BC < AD$). Через точки A , B_1 , C_1 проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения и объем призмы, если $AA_1 = 12$ см, $AB = 15$ см, $BC = 6$ см, $AD = 24$ см.

5. Пароход через два часа после отправления от пристани A останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной 0,8 первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани B на 3,5 ч. Если бы остановка произошла на 180 км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найдите расстояние AB .

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_x (x+1) < \log_{\frac{1}{x}} (2-x).$$

2. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin^3 \left(\frac{\pi}{4} + x \right).$$

3. Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = 2x^2 + 2$, если эти касательные проходят через точку $(0; 1)$.

4. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит прямоугольная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $CD < AB$, $BC < AD$). Через вершины C_1 , D_1 и B проведена плоскость. Найдите

площадь полученного сечения и объем призмы, если $AD = 14$ см, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см, $AA_1 = 8$ см.

5. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение $1\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба в течение $1\frac{1}{4}$ времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $11\frac{1}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x - 4 \cos 2x = 4.$$

2. Найдите угол, который образует с осью ординат касательная к кривой

$$y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{9},$$

проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

3. Решите неравенство

$$\lg 2 + \lg(2x - x^2) > \lg(1 + x^2).$$

4. Решите уравнение

$$5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$$

5. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α , вписан шар. Определите расстояние от вершины конуса до поверхности шара, если площадь основания конуса равна S .

Вариант 4

(химический факультет)

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 и наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin 7x + \sin 5x = 2 \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \leq 1.$$

4. Решите уравнение

$$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

на отрезке $[-3; 1]$.

Задачи устного экзамена

1. Докажите при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ тождество

$$\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. Найдите значение выражения

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 245^\circ.$$

3. Вычислите

$$2 + \log_2 \sin 7^\circ 30' + \log_2 \sin 82^\circ 30' - \log_{0,5} \sin 75^\circ.$$

4. Решите уравнение

$$\sin x + |\cos x| = -1.$$

5. Вычислите

$$\sin \left(\arccos \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 2 \right).$$

6. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC$, радиус вписанной окружности равен $4\sqrt{3}$ дм. Найдите стороны треугольника.

7. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность радиуса 3 см. Найдите боковую сторону и высоты треугольника.

8. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. Перпендикуляр, проведенный из середины BC к AB , равен 6 см, а расстояние от середины AB до катета BC равно 7,5 см. Найдите стороны треугольника ABC .

9. Решите неравенство

$$\log_7(3^{x-1} + 4) + x(\log_7 21 - 1) < 1 + \log_7 9.$$

10. Сравните с нулем значение выражения

$$\log_{\frac{1}{5}} 7 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 1,2 - 3 \log_{\frac{1}{5}} 2.$$

11. Решите уравнение

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$$

12. Решите уравнение

$$3 - \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{x+3}.$$

13. При каких значениях k корни уравнения

$$x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$$

относятся как 1:4?

14. Постройте график функции

$$y = x + |x^2 - 3x|.$$

15. Постройте график функции

$$y = x^4 - 8x^2 + 8.$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело брошено с земли вертикально вверх со скоростью 49 м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Лыдина равномерной толщины плавает, выступая над уровнем воды на 2 см. Найдите массу лыдины, если площадь ее основания 200 см^2 . Плотность льда $0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность воды 10^3 кг/м^3 .

3. В комнате объемом 40 м^3 при температуре 20°C относительная влажность воздуха составила 20%. Какую массу воды нужно испарить для увеличения относительной влажности воздуха до 50%? Плотность насыщенного водяного пара при 20°C равна $17,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$.

4. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя 527°C и температуру холодильника 47°C , если от нагревателя он получит 30 кДж тепла?

5. В сеть напряжением 120 В включены две электрические лампочки с сопротивлениями по 200 Ом. Какой ток пройдет через каждую лампочку при их параллельном и последовательном соединениях?

6. Аккумулятор с ЭДС 6 В и внутренним сопротивлением 0,1 Ом питает внешнюю цепь сопротивлением 11,9 Ом. Какое количество теплоты выделится за 10 мин во всей цепи?

7. Плоский виток площадью 10 см^2 помещен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. Сопротивление витка 1 Ом. Какой ток потечет по витку, если магнитная индукция поля будет убывать со скоростью 0,01 Тл/с?

8. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с воздухом падает луч света. Угол падения равен 30° . Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

9. Звуковые колебания распространяются в воде со скоростью 1480 м/с, а в воздухе – со скоростью 340 м/с. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе звука из воздуха в воду?

10. Возникнет ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны $0,45 \text{ мкм}$? Постоянная Планка $4,14 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$, работа выхода электронов из цинка 3,74 эВ.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
М.Чернецов, М.Чистова, Г.Шадрин